New BPS Domain Wall Solutions
Nuevas Soluciones Pared de Dominio BPS

Nelson Pantoja and Alba Ramírez
Centro de Astrofísica Teórica, Universidad de los Andes, Mérida 5101, Venezuela
(Dated: November 23, 2003)

Smooth solutions of gravity-scalar field models which represents BPS domain wall spacetimes with a well defined thin wall limit are obtained employing the first-orden formalisn of Skenderis & Towsend and DeWolfe, Freedman, Gubser & Karch. These solutions provide explicit examples of Randall-Sundrum thick domain wall scenarios.

Se obtienen nuevas soluciones pared de dominio gravitantes del tipo BPS que poseen límite de pared delgada bien definido, empleando el formalismo de primer orden propuesto por Skenderis y Townsend y DeWolfe, Freedman, Gubser y Karch, y que pueden ser relevantes en los denominados escenarios Randall-Sundrum.

1. INTRODUCCIÓN

Recientemente la posibilidad de que nuestro universo pueda ser representado por una pared infinitamente delgada o 3-brana embebida en un espacio de dimensionalidad alta, ha sido ampliamente investigada. Así, es posible reproducir gravedad Newtoniana sobre la brana y proveer una explicación de las jerarquías entre las fuerzas débiles y gravitacionales en los denominados escenarios Randall-Sundrum (RS) [1, 2].

Para generar soluciones pared de dominio gruesa en espacio-tiempos estáticos Townsend y Skenderis [3], y DeWolfe, Freedman, Gubser y Karch [4] proponen un formalismo de primer orden que genera soluciones pared de dominio del tipo denominado Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield (BPS) que dependen de una sola función arbitraria o superpotencial. Las paredes de dominio BPS son soluciones al sistema de ecuaciones Einstein-campo escalar que interpolan entre mínimos degenerados de un potencial con rompimiento espontáneo de simetría, que extremizan un funcional de Bogomol'nyi y que se encuentran embebidas en espacios AdS. Estas paredes BPS proveen versiones suaves de los escenarios RS [1, 2]. En dichas paredes, el potencial no es definido positivo. Sin embargo, extrayendo del tensor energía impulso la contribución que puede ser interpretada como proveniente de la constante cosmológica [5], el tensor energía impulso restante satisface las condiciones de energía débil y dominante y viola la condición de energía fuerte [6].

En el presente trabajo se generan nuevas soluciones pared de dominio gruesa mediante el método del superpotencial propuesto por Townsend y Skenderis y DeWolfe, Freedman, Gubser y Karch, parametrizadas de manera tal que los espaciotiempos resultantes poseen un límite de pared delgada bien definido en el sentido de las distribuciones [5].

2. PAREDES DE DOMINIO BPS

Consideremos la acción de gravedad D-dimensional acoplada a un campo escalar ϕ

$$S=\int dx^D\sqrt{-g}\left[\frac{1}{2}R-\frac{1}{2}\left(\partial\phi\right)^2-V\left(\phi\right)\right], \qquad (1)$$

donde la métrica tiene la forma genérica

$$ds^2=e^{2A(\xi)}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu+d\xi^2, \qquad (2)$$

$\mu,\nu=0,1,\cdots,D-1$ y donde $V\left(\phi\right)$ es un potencial de autointeracción.

El sistema de ecuaciones Einstein-campo escalar D-dimensional se resuelve en términos de una sóla función o superpotencial $\omega\left(\phi\right)$ [3, 4]

$$A'\equiv-2\omega\left(\phi\right), \qquad (3)$$

$$\phi'=2\left(D-2\right)\frac{d\omega}{d\phi}, \qquad (4)$$

y

$$V\left(\phi\right)=2\left(D-2\right)\left[\left(D-2\right)\left(\frac{d\omega}{d\phi}\right)^2-\left(D-1\right)\omega^2\left(\phi\right)\right]. \qquad (5)$$

3. NUEVAS SOLUCIONES PARED DE DOMINIO BPS

En ref. [4] se afirma que se puede obtener una solución pared de dominio gruesa con un límite pared delgada bien definida, si la función $\phi\left(\xi\right)$ es esencialmente la misma que describe a una pared de dominio o kink en ausencia de gravedad. Específicamente, requiriendo

i) que en el límite de pared delgada, se reduzca a una función escalón

ii) que sus primeras derivadas sean negativas y alcance una función delta,

iii) y además que $\phi\left(\xi\right)$ sea positiva, lo que asegura que sea invertible.

3.1. Pared de dominio gruesa BPS con $\Lambda = -\frac{4}{3}\beta^2$

Considérese el campo escalar $\phi(\xi)$ sugerido en [4], paramétrizado de manera tal que $\delta > 0$ juega el papel del ancho de la pared

$$\phi(\xi) = \sqrt{2\delta}\tanh\left(\frac{\beta}{\delta}\xi\right) \tag{6}$$

y supongamos que $D = 4$. Es fácil verificar que $(\phi')^2$ provee una familia δ.

El sistema de ecuaciones de primer orden (3), (4) y (5) queda resuelto por

$$\omega(\phi) = \frac{\beta}{2\sqrt{2\delta}}\phi(\xi)\left[1 - \frac{\phi^2(\xi)}{6\delta}\right] \tag{7}$$

de donde obtenemos

$$A(\xi) = -\frac{\delta}{3}\left[2\ln\left(\cosh\left(\frac{\beta}{\delta}\xi\right)\right) + \frac{1}{2}\tanh^2\left(\frac{\beta}{\delta}\xi\right)\right] \tag{8}$$

y

$$\begin{aligned} V(\phi) &= \frac{\beta^2}{\delta}\left[1 - \frac{(2+3\delta)}{2\delta}\phi^2(\xi) + \frac{(1+2\delta)}{4\delta^2}\phi^4(\xi)\right. \\ &- \left.\frac{1}{24\delta^2}\phi^6(\xi)\right]. \end{aligned} \tag{9}$$

Nótese que $V(\phi)$ no está acotado por debajo y que sus puntos críticos son:

i) $\phi = 0$, *máximo secundario,*

ii) $\phi = \pm\sqrt{6\delta + 4}$, *máximos principales ,*

iii) $\phi = \pm\sqrt{2\delta}$, *mínimos.*

donde el parámetro δ representa el espesor de la pared. Además

$$\lim_{\delta\to 0}\left(G^\mu_\nu + \Lambda g^\mu_\nu\right) = -\frac{4}{3}\beta\,\delta(\xi)\left(\partial^\mu_t dt_\nu + \partial^\mu_y dy_\nu + \partial^\mu_z dz_\nu\right)$$

donde $\Lambda = -\frac{4}{3}\beta^2$ es la constante cosmológica. Por lo que tenemos una solución donde

i) $\phi(\xi)$ *toma valores distintos para* $\pm\infty$,

ii) $(\phi')^2$ *es una familia delta,*

iii) los mínimos del potencial coinciden con los puntos críticos del superpotencial, lo cual garantiza que estos mínimos son vacíos estables [3],

iv) el campo escalar interpola entre los mínimos del potencial,

v) posee límite de pared delgada,

vi) asintóticamente, tenemos un espacio-tiempo 4-dimensional AdS con $\Lambda = -\frac{4}{3}\beta^2$.

3.2. Pared de dominio en un espacio-tiempo 4-D asintóticamente plano por un lado y AdS por el otro

Se propone como nueva solución el siguiente campo escalar, en un espacio-tiempo $D = 4$

$$\phi(\xi) = \sqrt{\delta}e^{-e^{-\frac{\beta}{\delta}\xi}} \tag{10}$$

donde $(\phi')^2$ es una familia delta, como puede verificarse fácilmente, con $\delta > 0$.

Ahora, como solución al sistema de ecuaciones (3), (4) y (5) se encuentra

$$\omega(\phi) = \frac{\beta}{4\delta}\phi^2\left(\frac{1}{4} - \frac{\ln\left(\frac{\phi}{\sqrt{\delta}}\right)}{2}\right) \tag{11}$$

de donde obtenemos

$$A(\xi) = -\frac{\delta}{8}\left(e^{-2e^{-\frac{\beta}{\delta}\xi}} + Ei\left(1, 2e^{-\frac{\beta}{\delta}\xi}\right)\right), \tag{12}$$

donde Ei es la integral exponencial definida como

$$Ei(n,x) = \int_{t=1}^{\infty}\frac{e^{-xt}}{t^n}dt, \quad n = 0,1,2,...; \Re x > 0.$$

El potencial de autointeracción viene dado por

$$\begin{aligned} V(\phi) &= \frac{\beta^2}{2\delta^2}\phi^2\left[\left(1 - \frac{3}{8}\phi^2\right)\ln^2\left(\frac{\phi}{\sqrt{\delta}}\right)\right. \\ &+ \left.\frac{3}{8}\phi^2\ln\left(\frac{\phi}{\sqrt{\delta}}\right) - \frac{3}{32}\phi^2\right]. \end{aligned} \tag{13}$$

Con respecto a sus puntos críticos, es fácil verificar que $\omega'(\phi) = 0$ para $\phi = 0$ o $\phi = \sqrt{\delta}$ y que éstos puntos críticos coinciden con algunos de los del potencial.

Las componentes del tensor de Einstein vienen dadas en este caso por

$$\begin{aligned} G^t_t =&- \frac{\beta^2}{2\delta}e^{-2e^{-\frac{\beta}{\delta}\xi}}\left[2e^{-2\frac{\beta}{\delta}\xi} - \frac{3}{8}\delta e^{-2e^{-\frac{\beta}{\delta}\xi}}e^{-2\frac{\beta}{\delta}\xi}\right. \\ &- \left.\frac{3}{8}\delta e^{-2e^{-\frac{\beta}{\delta}\xi}}e^{-\frac{\beta}{\delta}\xi} + \frac{3}{32}\delta e^{-2e^{-\frac{\beta}{\delta}\xi}}\right], \end{aligned} \tag{14}$$

donde $G^t_t = G^x_x = G^y_y$ y

$$\begin{aligned} G^\xi_\xi &= \frac{\beta^2}{2}e^{-2e^{-\frac{\beta}{\delta}\xi}}\left[-\frac{3}{8}e^{-2e^{-\frac{\beta}{\delta}\xi}}e^{-2\frac{\beta}{\delta}\xi} - \frac{3}{8}e^{-2e^{-\frac{\beta}{\delta}\xi}}e^{-\frac{\beta}{\delta}\xi}\right] \\ &+ \frac{3\beta^2}{64}e^{-4e^{-\frac{\beta}{\delta}\xi}}. \end{aligned} \tag{15}$$

Consideremos a continuación el límite de pared delgada. Tenemos

$$\lim_{\delta\to 0} G^t_t = -\frac{\beta}{4}\delta(\xi) + \Theta(\xi)\frac{3\beta^2}{64},$$

donde $\Theta(\xi)$ es la distribución de Heaviside, y

$$\lim_{\delta\to 0} G^\xi_\xi = \Theta(\xi)\frac{3\beta^2}{64}.$$

Por lo tanto

$$\lim_{\delta\to 0} G^{\mu}_{\nu} = -\frac{\beta}{4}\delta\left(\xi\right)\left(\partial^{\mu}_{t}dt_{\nu} + \partial^{\mu}_{y}dy_{\nu} + \partial^{\mu}_{z}dz_{\nu}\right) - \Theta(\xi)\Lambda g^{\mu}_{\nu}$$

con $\Lambda = -\frac{3\beta^2}{64}$.

Hemos encontrado entonces una solución pared de dominio en la cual

i) el campo escalar $\phi\left(\xi\right)$ que toma distintos valores en $\pm\infty$,

ii) $\left(\phi'\right)^2$ es una familia delta,

iii) los mínimos del potencial coinciden con los puntos críticos del superpotencial, lo cual garantiza que la configuración es estable,

iv) el campo escalar interpola entre los mínimos del potencial,

v) el límite de pared delgada es un espacio-tiempo 4-dimensional, donde no existe constante cosmológica para $\xi < 0$, mientras que para $\xi > 0$, se tiene una constante cosmológica $\Lambda = -\frac{3\beta^2}{64}$.

4. CONCLUSIONES

Hemos revisado la estrategia del superpotencial propuesta por Townsend & Skenderis [3] y DeWolfe et. al. [4], para obtener soluciones paredes de dominio gruesas BPS. Utilizando esta estrategia hemos obtenido nuevas soluciones con campos escalares $\phi\left(\xi\right)$ tales que $\left(\phi'\right)^2$ es una familia delta. Estas soluciones, aunque encontradas en $D = 4$, son facilmente extendibles a $D = 5$ como en el caso del escenario RS [1, 2] o a dimensiones aún mas altas.

Las soluciones encontradas a partir del formalismo de primer orden empleado son en general soluciones pared de dominio gruesa BPS que poseen un límite de pared delgada bien definido y que están embebidas en espacio-tiempos AdS. Sin embargo, una de estas soluciones es particularmente interesante, estando embebida en un espacio-tiempo con constante cosmológica igual a cero por un lado y con constante cosmológica negativa por el otro.

[1] L. Randall and R. Sundrum, Phys. Rev. Lett. **83** (1999) 3370 [arXiv:hep-ph/9905221].
[2] L. Randall and R. Sundrum, Phys. Rev. Lett. **83** (1999) 4690 [arXiv:hep-th/9906064].
[3] K. Skenderis and P. K. Townsend, Phys. Lett. B **468** (1999) 46 [arXiv:hep-th/9909070].
[4] O. DeWolfe, D. Z. Freedman, S. S. Gubser and A. Karch, Phys. Rev. D **62** (2000) 046008 [arXiv:hep-th/9909134].
[5] R. Guerrero, A. Melfo and N. Pantoja, Phys. Rev. D **65** (2002) 125010 [arXiv:gr-qc/0202011].
[6] R. Gass and M. Mukherjee, Phys. Rev. D **60** (1999) 065011 [arXiv:gr-qc/9903012].