

ANÁLISIS DE ESTABILIDAD NUMÉRICA DEL ESQUEMA IMPLÍCITO DE LOS CUATRO PUNTOS BASADO EN DIFERENCIAS FINITAS

Darío José Canelón Sánchez¹
Universidad de Los Andes, NURR, Trujillo

Resumen

Se realiza un análisis de estabilidad de Von Neumann del esquema numérico de los cuatro puntos, también conocido como Esquema Preissmann, basado en diferencias finitas y actualmente utilizado en el modelo hidráulico CanalMan. En el análisis se utilizó una forma linealizada de las ecuaciones de Saint Venant. Las ecuaciones resultantes fueron resueltas para valores constantes de caudal, área de la sección transversal, profundidad del flujo, y valores variables de incrementos de longitud y tiempo, coeficientes de ponderación de espacio, ϕ , y de tiempo, θ . Los resultados confirmaron que el esquema implícito de cuatro puntos es incondicionalmente estable para diferentes valores de la relación $t/\Delta x$, mientras se mantenga el valor de f igual a 0,50 y para valores de θ cercanos a 0,60.

Palabras clave: Diferencias finitas, ecuaciones de Saint Venant; análisis de estabilidad.

NUMERICAL STABILITY ANALYSIS OF THE FOUR POINT IMPLICIT FINITE DIFFERENCES SCHEME

Abstract

A von Neumann stability analysis was applied to the numerical scheme currently used in the CanalMan hydraulic model, which is called four-point implicit finite difference scheme, sometimes known as the Preissmann scheme. The stability analysis was performed using a linearized form of the Saint Venant equations. The resulting equations were solved for constant values of flow rate, cross-sectional area, and flow depth, and variable values of spatial flow increments, temporal increments, wave amplitude, spatial weighting coefficient, ϕ , and temporal weighting coefficient, θ . The results confirmed that the four-point implicit scheme is unconditionally stable for different values of $t/\Delta x$, while maintaining the value of f (spatial weighting coefficient) equal to 0.5 for values of θ (temporal weighting coefficient) near 0.60.

Keywords: Finite Differences; Saint-Venant Equations, Stability Analysis.

Introducción

CanalMan es un modelo matemático integral desarrollado para ejecutar simulaciones hidráulicas de flujo no permanente en una red de distribución por canales. Fue desarrollado en la Universidad del Estado de Utah y ha sido usado extensamente tanto en los Estados Unidos como en otras regiones del mundo (Merkley, 1995). Utiliza una variación de un esquema implícito de cuatro puntos basado en diferencias finitas (conocido como el esquema Preissmann) para aproximar numéricamente la solución de las ecuaciones de Saint Venant de continuidad y movimiento para flujo no permanente y unidimensional en canales abiertos (Canelón, 2002). CanalMan se desempeña adecuadamente para la gran

¹Jefe del Laboratorio de Hidráulica. Email: djcanelon@cantv.net; dcanelon@ula.ve

mayoría de situaciones presentes en una red de distribución por canales; sin embargo, para unos pocos casos conocidos el proceso de simulación puede fallar después de sufrir fluctuaciones numéricas de gran amplitud (Cong, 2000).

El esquema Preissmann ha sido ampliamente utilizado para resolver matrices en bandas desde principios de los años 1960s. Tiene la ventaja que una malla de espaciamiento variable puede ser utilizada, que ondas con frentes pronunciados pueden ser apropiadamente simulados al variar los coeficientes de ponderación, y que el esquema proporciona una solución exacta de la forma linearizada de las ecuaciones gobernantes para valores particulares de Dx y Dt (Chaudhry, 1993). Pero en vista de que el esquema posee una precisión del segundo orden, la solución numérica puede mostrar oscilaciones de naturaleza no física en la cercanía de discontinuidades, tales como ondas hidráulicas de choque.

La estabilidad de un esquema numérico utilizado para resolver una ecuación algebraica lineal o un sistema de ecuaciones es determinada al estudiar si un error crece o disminuye a medida que la solución progresa en un proceso dependiente del tiempo. Cuando la solución exacta es conocida, este error es la diferencia entre dicha solución y la aproximación numérica. El análisis de estabilidad es una evaluación fundamental del esquema numérico a ser aplicado; si se determina que el esquema es inestable, cualquier trabajo adicional con éste será infructuoso y debe buscarse un método alternativo de solución. Para ecuaciones no lineales, no hay actualmente disponibles procedimientos rigurosos para determinar la estabilidad; sin embargo, bien sea descartando o linearizando los términos no lineales, la estabilidad puede ser estudiada. Si los efectos no lineales son relativamente débiles, tales como aquellos presentes en las ecuaciones de Saint Venant, entonces los criterios desarrollados para las ecuaciones lineales pueden también ser asumidos como válidos para las ecuaciones no lineales. Existen diferentes métodos para ejecutar un análisis de estabilidad; el utilizado en este trabajo es el conocido como análisis de von Neumann o de Fourier, ya que está basado en las transformadas de Fourier (Hirsch, 1988).

Ecuaciones de Saint Venant

Las ecuaciones de Saint Venant constituyen un sistema de dos ecuaciones diferenciales parciales, no lineales e hiperbólicas, que se utilizan para describir procesos físicos que involucren el movimiento de ondas, tal como el flujo de agua en canales. Las ecuaciones involucradas son la ecuación de continuidad y la ecuación del movimiento.

Ecuación de continuidad

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Z}{\partial t} = 0$$

donde Q es la tasa de flujo (m^3/s); A es el área de la sección transversal (m^2); Z es un término de pérdidas por filtración (m^2); x es la distancia longitudinal en la dirección del flujo (m); y t es el tiempo consumido (s). El valor de Z es positivo para salida de agua y negativo para entrada.

El término de pérdidas por filtración, Z , depende del área de la sección transversal,

A, y su valor es frecuentemente cercano a cero; por lo tanto, puede ser ocasionalmente despreciado, resultando en:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0$$

Ecuación del movimiento

$$\frac{1}{g} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{Q}{gA} \frac{\partial Q}{\partial x} = AS_o - D \quad (3)$$

donde el término de presión, P, puede ser expresado como una función del área de la sección transversal, A, tal como $P = h_c A$. De esta manera,

$$\frac{1}{g} \frac{\partial Q}{\partial t} + h_c \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{Q}{gA} \frac{\partial Q}{\partial x} = AS_o - D$$

Esquema de los cuatro puntos

El esquema de los cuatro puntos es un esquema implícito basado en diferencias finitas. Su formulación general es la siguiente (Cunge et al, 1980):

$$F_t = \frac{[\phi F_{i+1}^{k+1} + (1-\phi)F_i^{k+1}] - [\phi F_{i+1}^k + (1-\phi)F_i^k]}{\Delta t}$$

la cual es una diferencia hacia adelante de primer orden en tiempo con un coeficiente de ponderación espacial f. La derivada con respecto a x es:

$$G_x = \frac{\theta(G_{i+1}^{k+1} - G_i^{k+1}) + (1-\theta)(G_{i+1}^k - G_i^k)}{\Delta x}$$

la cual es una diferencia hacia adelante de primer orden en espacio con un coeficiente de ponderación temporal θ . En la Ec. 5, $0,5 < \phi < 1$, y en la Ec. 6, $0,5 < \theta < 1$. Cuando $\phi = 0,5$, el esquema de los cuatro puntos es conocido como esquema Preissmann; en cuanto a θ , el esquema es totalmente explícito para $\theta = 0$, e implícito para $\theta = 1$.

Análisis de estabilidad

El análisis de estabilidad se desarrolló siguiendo cercanamente el enfoque sugerido por Chaudhry (1993) y adaptado por Canelón (2002). Para llevar a cabo el análisis de estabilidad, la ecuación del movimiento se linealizó descartando el término de fricción (término de fuente), y utilizando los coeficientes Q_o y A_o para indicar valores de tasa de flujo y área de la sección transversal, respectivamente, bajo condiciones de flujo uniforme.

La ecuación de continuidad, por el contrario, no tiene términos no lineales y el término de fuente es cero. De este modo, la Ec. 4 se convierte en:

$$\frac{1}{g} \frac{\partial Q}{\partial t} + h_{co} \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{Q_o}{gA_o} \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (7)$$

Substituyendo la aproximación de diferencias finitas de Ecs. 5 y 6 en Ecs. 2 y 7,

$$\frac{\theta(Q_{i+1}^{k+1} - Q_i^{k+1}) + (1-\theta)(Q_{i+1}^k - Q_i^k)}{\Delta x} +$$

$$\frac{[\phi A_{i+1}^{k+1} + (1-\phi)A_i^{k+1}] - [\phi A_{i+1}^k + (1-\phi)A_i^k]}{\Delta t} = 0$$

y,

$$\frac{[\phi Q_{i+1}^{k+1} + (1-\phi)Q_i^{k+1}] - [\phi Q_{i+1}^k + (1-\phi)Q_i^k]}{g\Delta t} +$$

$$h_{co} \frac{\theta(A_{i+1}^{k+1} - A_i^{k+1}) + (1-\theta)(A_{i+1}^k - A_i^k)}{\Delta x} + \tag{9}$$

$$\frac{Q_o}{gA_o} \frac{\theta(Q_{i+1}^{k+1} - Q_i^{k+1}) + (1-\theta)(Q_{i+1}^k - Q_i^k)}{\Delta x} = 0$$

Tanto la solución exacta como la aproximación numérica de las ecuaciones de Saint Venant deben satisfacer las respectivas ecuaciones de diferencias. Para que el esquema de discretización sea estable, los errores introducidos deben decaer a medida que la solución progresa de un intervalo de tiempo al siguiente. Para investigar esto, se expresan Q_i^k y A_i^k en una serie de Fourier como:

$$Q_i^k = \sum_{n=0}^N C'_n e^{j\alpha_n x_i}$$

y,

$$A_i^k = \sum_{n=0}^N D'_n e^{j\alpha_n x_i}$$

en la cuales C'_n y D'_n son coeficientes que representan la amplitud de la onda armónica; $j = (-1)^{1/2}$ es el número de onda; $\alpha_n = n/L$ ($n = 0, 1, 2, \dots, N$); y el intervalo de interés es la longitud L . Pero, $x_{i+1} = x_i + \Delta x$; entonces,

$$Q_{i+1}^k = \sum_{n=0}^N C'_n e^{j\alpha_n x_i} e^{j\alpha_n \Delta x}$$

y,

$$A_{i+1}^k = \sum_{n=0}^N D'_n e^{j\alpha_n x_i} e^{j\alpha_n \Delta x}$$

En vista de que el sistema es lineal, solamente se necesita considerar un término de la serie, en lugar de la suma de los N términos. Adicionalmente, las expresiones siguientes pueden ser introducidas:

$$Q_i^{k+1} = e^{\beta} Q_i^k = \xi Q_i^k = \xi C'_n e^{j\alpha x_i} \tag{14}$$

$$Q_{i+1}^{k+1} = e^{\beta} Q_{i+1}^k = \xi Q_{i+1}^k = \xi C' e^{j\alpha x_i} e^{j\alpha \Delta x} \quad (15)$$

$$A_i^{k+1} = e^{\beta} A_i^k = \xi A_i^k = \xi D' e^{j\alpha x_i} \quad (16)$$

y,

$$A_{i+1}^{k+1} = e^{\beta} A_{i+1}^k = \xi A_{i+1}^k = \xi D' e^{j\alpha x_i} e^{j\alpha \Delta x}$$

en las cuales se incluye ξ , que es el factor de *amplificación*. Dependiendo del valor de ξ , un error introducido en cualquier momento puede crecer o decaer a medida que la computación progresa en tiempo. Si $|\xi| < 1$, el error decae y se dice que el esquema es estable; sin embargo, si $|\xi| > 1$, el error crece y el esquema es inestable. El esquema se considera neutralmente estable si $|\xi| = 1$. Substituyendo las expresiones anteriores en las Ecs. 8 y 9, y luego de algunas operaciones,

$$C' \left[\frac{\theta}{\Delta x} (e^{j\alpha \Delta x} - 1) \left(\xi + \frac{(1-\theta)}{\theta} \right) \right] + \quad (18)$$

$$D' \left[\frac{\phi}{\Delta t} \left(e^{j\alpha \Delta x} + \frac{(1-\phi)}{\phi} \right) (\xi - 1) \right] = 0$$

y,

$$C' \left[\frac{\phi}{g \Delta t} \left(e^{j\alpha \Delta x} + \frac{(1-\phi)}{\phi} \right) (\xi - 1) + \frac{Q_o \theta}{g A_o \Delta x} (e^{j\alpha \Delta x} - 1) \left(\xi + \frac{(1-\theta)}{\theta} \right) \right] + \quad (19)$$

$$D' \left[\frac{h_{\infty} \theta}{\Delta x} (e^{j\alpha \Delta x} - 1) \left(\xi + \frac{(1-\theta)}{\theta} \right) \right] = 0$$

Ahora, substituyendo $e^{j\alpha x} = \cos(\delta) + j \sin(\delta)$ en las Ecs. 18 y 19 y simplificando,

$$C' \frac{\theta C_2}{\Delta x} (\xi + C_1) + D' \frac{\phi C_3}{\Delta t} (\xi - 1) = 0 \quad (20)$$

y,

$$C' \left\{ \frac{\phi C_3}{g\Delta t} (\xi - 1) + \frac{Q_o \theta C_2}{gA_o \Delta x} (\xi + C_1) \right\} + D' \frac{h_{\infty} \theta C_2}{\Delta x} (\xi + C_1) = 0 \quad (21)$$

donde,

$$C_1 = \frac{(1-\theta)}{\theta}$$

$$C_2 = \cos(\delta) + j \sin(\delta) - 1 \quad (23)$$

y,

$$C_3 = \cos(\delta) + j \sin(\delta) + \frac{(1-\theta)}{\theta}$$

Para una solución no trivial de C' y D', tenemos de las Ecs. 20 y 21 que,

$$\begin{vmatrix} \frac{\theta C_2}{\Delta x} (\xi + C_1) & \frac{\phi C_3}{\Delta t} (\xi - 1) \\ \frac{\phi C_3}{g\Delta t} (\xi - 1) + \frac{Q_o \theta C_2}{gA_o \Delta x} (\xi + C_1) & \frac{h\theta_{\infty}}{\Delta x} (\xi + C_1) \end{vmatrix} = 0 \quad (25)$$

Finalmente, luego de algunas operaciones, se obtiene una ecuación cuadrática para ξ ,

$$\xi = \frac{-C_5 \pm \sqrt{C_5^2 - 4C_4 C_6}}{2C_4} \quad (26)$$

donde,

$$C_4 = C_7 - C_8 - C_9$$

$$C_5 = 2C_1 C_7 + 2C_8 - C_1 C_9 + C_9 \quad (28)$$

$$C_6 = C_1^2 C_7 - C_8 + C_1 C_9$$

$$C_7 = h_{\infty} \left(\frac{\theta C_2}{\Delta x} \right)^2 \quad (30)$$

$$C_8 = \frac{1}{g} \left(\frac{\phi C_3}{\Delta t} \right)^2$$

y,

$$C_9 = \frac{\theta \phi Q_0 C_2 C_3}{g A_0 \Delta x \Delta t}$$

Para que el esquema numérico sea estable, $|x| \leq 1$; es decir,

$$\left| \frac{-C_5 \pm \sqrt{C_5^2 - 4C_4 C_6}}{2C_4} \right| \leq 1$$

Resultados

La ecuación 33 se resolvió para valores constantes de $Q_0 = 0,10 \text{ m}^3/\text{s}$, $A_0 = 0,36 \text{ m}^2$, $h_{\infty} = 0,18 \text{ m}$, y $g = 9,81 \text{ m/s}^2$; y valores variables de x , t , σ , ϕ y θ . Los valores adoptados de Q_0 , A_0 , y h_{∞} son comunes en canales. Los resultados se presentan en las Figuras 1 a 3, mostrando la relación que existe entre σ y ξ para valores seleccionados de ϕ , θ , y la razón t/x . Para que el esquema sea estable, ξ debe ser menor o igual a cero para el rango completo de valores de σ ($-\pi \leq \sigma \leq \pi$). La Fig. 1 muestra la relación entre σ y ξ para valores comunes constantes de $\phi = 0,50$ y $\theta = 0,60$, y t/x menor que uno ($t/x = 0,50$). Tal como se esperaba (Chaudhry, 1993), el esquema implícito de los cuatro puntos es incondicionalmente estable, porque las dos curvas generadas indican valores de ξ_1 y ξ_2 que son menores o iguales a la unidad.

La Fig. 2 muestra curvas de ξ_1 y ξ_2 para un valor de ϕ menor que 0,50 ($\phi = 0,40$). El valor de t/x es 0,50 y el correspondiente a θ es 0,60. Los valores de ξ_1 permanecen menores que uno (estable) para el rango completo de valores de σ ; los valores de ξ_2 , al contrario, son todos mayores que uno (inestable).

Finalmente, la Fig. 3 muestra curvas de ξ_1 y ξ_2 para un valor de θ menor que 0.60 ($\theta = 0.50$). El valor de t/x es 0.50 y el correspondiente a ϕ es 0.50 también. Los

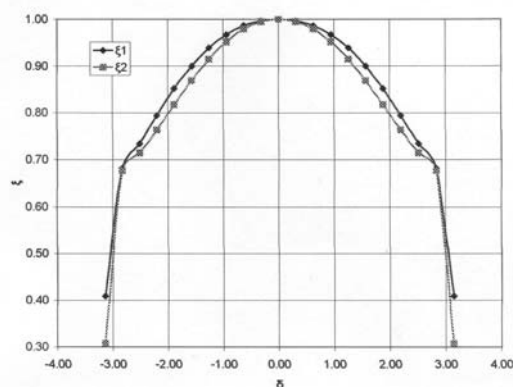


Figura 1. Análisis de estabilidad (ξ vs. σ para $t/x = 0,5$, $\psi = 0,50$ y $\theta = 0,60$)

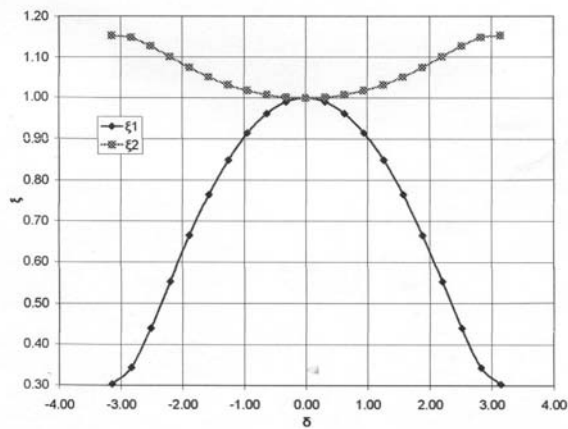


Figura 2. Análisis de Estabilidad (ξ vs. σ para $t/x = 0,5$, $\psi = 0,40$ y $\theta = 0,60$)

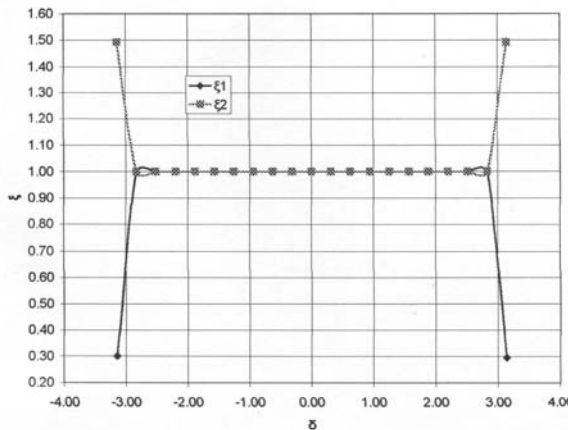


Figura 3. Análisis de Estabilidad (ξ vs. σ para $t/x = 0,5$, $\phi = 0,50$ y $\theta = 0,50$)

valores de ξ_1 y ξ_2 permaneces iguales a la unidad (neutralmente estable) para el rango completo de valores de σ , con la excepción de $-\infty$ y $+\infty$, para los cuales los valores de ξ_1 y ξ_2 son menores que uno (estable) y mayores que uno (inestable), respectivamente.

Conclusiones

1. El método de Fourier es un procedimiento relativamente directo para analizar la estabilidad de sistemas de ecuaciones lineales, siempre y cuando el esquema numérico de discretización de las ecuaciones sea explícito; para esquemas implícitos, como esquema de los cuatro puntos, el procedimiento es un tanto complicado.
2. Tal como ha sido reportado en la literatura, el esquema implícito de los cuatro puntos es estable incondicionalmente para la forma linearizada de las ecuaciones de Saint Venant para cualquier valor del incremento de la relación espacio-tiempo (t/x), siempre y cuando el coeficiente de ponderación espacial (ϕ) sea igual a 0,50 (esquema Preissmann) y el valor del coeficiente de ponderación temporal (θ) se mantenga cercano a 0,60.

3. El análisis de estabilidad indica firmemente que la configuración más estable de una solución implícita de cuatro puntos a las ecuaciones de Saint Venant se logra para altos valores de la relación $t/\Delta x$, lo cual implica muchos nodos espaciales con relación a la variación del tiempo, y coeficientes de ponderación en el rango de 0,50 a 0,60.

4. Los resultados obtenidos en el análisis de estabilidad utilizando la forma linealizada de la ecuaciones de Saint Venant deberían considerarse como resultados preliminares ya que se hicieron algunas asunciones para simplificar el sistema de ecuaciones no lineales que se presentan en situaciones reales de flujo de agua en canales.

Referencias

- CANELON, D.J. (2002). Numerical Issues Related to the Solution of the Saint-Venant Equations for one-dimensional Open-Channel Flow. Ph.D. Dissertation, USU. 108p.
- CHAUDHRY, M.H. (1993). Open-Channel Flow. New Jersey, USA. Prentice-Hall, Englewood Cliffs. 483p.
- CONG, C.N. (2000). Hydraulic analysis of Unsteady Flow in Open Channels with Changing Flow Regimes at a Gate Structure. Ph.D. Dissertation, USU. 109p.
- CUNGE, J., HOLLY, F. y VERWEY, A. (1980). Practical Aspects of Computational River Hydraulics. Pitman, London. 420p.
- HIRSCH, C. (1988). Numerical computation of internal and external flows. Volume I: Fundamentals of numerical discretization. John Wiley & Sons. 538p.
- MERKLEY, G.P. (1995). CanalMan: A hydraulic simulation model for unsteady flow in branching canal networks, Version 5.30. Logan, Utah. Utah State University.

