NOTAS DE MATEMATICA

Nº 25

UN ALGEBRA DE FUNCIONES SOBRE EL CONJUNTO DE CANTOR

POR

M. RAJAGOPALAN Y GILBERTO GONZALEZ

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

FACULTAD DE CIENCIAS

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

MERIDA - VENEZUELA

1978

UN ALGEBRA DE FUNCIONES SOBRE EL CONJUNTO DE CANTOR

M. RAJAGOPALAN Y GILBERTO GONZALEZ

En este trabajo I denota el intervalo $[0,1]$ y K el conjunto de Cantor en I. Si X es un espacio compacto de Hausdorff, denotaremos por $\mathcal{C}(X)$ el conjunto de todas las funciones continuas de X en $\mathbb{C}$ ($\mathbb{C}$ denotará el cuerpo de los números complejos). $\mathcal{C}(X)$ con sus operaciones algebraicas y su norma dada por el supremo, es decir, $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$, $(f \in \mathcal{C}(X))$ es un álgebra de Banach. Un algebra uniforme sobre X, se define como un álgebra $A \subset \mathcal{C}(X)$ que contiene todas las constantes, separa puntos de X y es cerrada en la topología de la norma dada por el supremo de funciones.

Un problema interesante, es construir un álgebra uniforme A sobre K que es diferente a $\mathcal{C}(K)$.

Dentro de otro contexto, se puede deducir de los trabajos de Rudin [2], un ejemplo de tal naturaleza. En este trabajo encontramos un nuevo ejemplo de un álgebra uniforme A sobre K que no es igual a $\mathcal{C}(K)$.

<u>LEMA 1</u>: Existe una función continua de K sobre I.

<u>DEMOSTRACION:</u> Los puntos del conjunto de Cantor K son de la forma:

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} \quad , \quad \text{con } a_i = 2 \text{ u o. Sea } f: K \to I$$

la función dada por:

$$f(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i}$$

Así f es continua y sobreyectiva como se puede ver fácilmente.

NOTACION: Exp(z) denotará e^z para cada $z \in \mathbb{C}$. $\psi : I \to \mathbb{C}$ es la función $\psi(t) = \exp(2\pi i t)$, para todo $t \in [0,1]$. $f: K \to I$ es la función definida por el lema 1. Si denotamos por T el conjunto de todos los $Z \in \mathbb{C}$, con $|z| = 1$, es decir, el círculo unitario y D el disco unitario, esto es, $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$. $A(D)$ es el conjunto de las funciones analíticas en D^0 y continuas en D. Para $1 \leq p \leq \infty$ indicaremos por $H^p(t)$ la clase de funciones f que son analíticas en el interior de D para las cuales las funciones $f_r(\theta) = f(r e^{i\theta})$ son acotados en la norma de L_p cuando $r \to 1$. Para más detalles sobre estos espacios ver [1], donde además, se demuestra que H^p es un álgebra de Banach bajo la norma

$$\| f \| = \lim_{r \to 1} \| f_r \|_p \quad , \quad f \in H^p(t).$$

N denotará el conjunto de los naturales.

NOTA: La función $\Psi: K \to T$ definida por $\Psi = \psi \circ f$ es continua y sobreyectiva. De la forma como está definida la función f da da en el lema 1 deducimos que cada punto de la forma $\exp(2\pi it)$ con $t \neq \frac{m}{2^n}$ donde m, $n \in N(0 \leq m \leq 2^n)$ tiene exactamente una sola imagen inversa por Ψ en K. En cambio cada número de la forma $\exp(2\pi i \frac{m}{2^n})$, m y n como antes, tiene asociados dos números x, $y \in K$, tal que $\Psi(x) = \Psi(y) = \exp(2\pi i \frac{m}{2^n})$.

<u>DEFINICION 2:</u> Sea $\theta : T \to \mathbb{C}$ una función y $t_o \in (0,1)$. θ se dice continua a la izquierda en $\exp(2\pi i\, t_o)$ si $\theta \circ \psi$ de I en $\mathbb{C}$ es continua a la izquierda en t_o . La continuidad de θ a la derecha en $\exp(2\pi i\, t_o)$ es definida de manera similar. Diremos que θ es continua a la izquierda en 1 si $\theta \circ \psi$ de I en $\mathbb{C}$ es continua a la izquierda en 1 y θ es continua a la - derecha en 1 si $\theta \circ \psi$ es continua a la derecha en 0.

Se definen similarmente los límites de θ a la derecha- ó a la izquierda en z_o , cuando $z_o \in T$.

<u>DEFINICION 3:</u> Denotaremos por $\mathcal{B}$ la colección de funciones y definidas en T a valores en $\mathbb{C}$, con las siguientes propiedades:

1) $g \in H^\infty(T)$
2) g tiene límites a la derecha y a la izquierda en z_o para cada $z_o \in T$.
3) g es continua a la izquierda en z para cada $z \in T$.
4) Si $z \in T$ y no tiene la forma $\exp(2\pi i \frac{m}{2^n})$ para algunos enteros positivos m y n, entonces g es continua en z .

LEMA 4. $\mathcal{B}$ es un álgebra sobre T que es cerrada en $H^{\infty}(T)$

DEMOSTRACION: Trivial

DEFINICION 5: Dada $g \varepsilon \mathcal{B}$. Definimos $S(g)$ la función de K en $\mathbb{C}$ dada por la siguiente relación:

a) Si $T \varepsilon K$ y $f(t) \neq \frac{m}{2^n}$, donde m,n son enteros positivos definimos $Sg(t)$ igual al valor $(g \circ \psi \circ f)(t)$.

b) Si $t \varepsilon K$ y $f(t) = \frac{m}{2^n}$ con m y n como en a), entonces por la nota despues del lema 1 existe exactamente otro-único $s \varepsilon K$, tal que $s \neq t$ y $\psi(s) = \psi(t)$. Si $s < t$, definimos $S(g)(t)$ igual al límite de g por la dere - cha en $\exp(2\pi i\, f(t))$ y si $s > t$ definimos $Sg(t)$ igual al límite de g por la izquierda en $\exp(2\pi i\, f(t))$.

LEMA 5: Para cada $g \varepsilon \mathcal{B}$, $S(g)$ es una función continua de K en $\mathbb{C}$. Además, $\|S(g)\|_{\infty} = \|g\|_{\infty}$

DEMOSTRACION:

$$\|S(g)\|_{\infty} = \sup_{t \varepsilon K} |S_g(t)|$$

$$= \sup_{z \varepsilon T} |g(z)|$$

$$= \|g\|_{\infty}$$

Ya que el rango de ψ o f es T y g es continua por la izquierda en T .

Denotemos por A al conjunto $\{S(g) \; ; \; g \in \mathcal{B}\}$. De esta manera $A \subset \mathcal{C}(K)$.

TEOREMA 6: A es un álgebra uniforme sobre K, y además , $A \neq \mathcal{C}(K)$.

DEMOSTRACION: $A \subset \mathcal{C}(K)$. Puesto que la función $1 \in \mathcal{B}$ y $S(1) = 1$, se tiene que las constantes están en A. Considerando a S como una función de $\mathcal{B}$ sobre A, vemos que S es una biyección. Además, A es un álgebra de $\mathcal{C}(K)$ es completa en virtud de la isometría entre A y $\mathcal{B}$. (ver lema 5.). En conclusión A es un espacio cerrado de $\mathcal{C}(K)$ en la norma del supremo.

Queremos probar que A separa puntos de K . Sean $x, y \in K$, con $x \neq y$. Hay dos casos que se pueden señalar:

CASO I: $\psi(x) \neq \psi(y)$. Nótese, que la función $u(z) = z$ pertenece a $\mathcal{B}$. En este caso la función $S(u)$ separa a x e y .

CASO II: $\psi(x) = \psi(y)$. Por definición de la función f existe $m, n \in N$ tal que $\psi(x) = \psi(y) = \exp(2\pi i \frac{m}{2^n})$. Sea $z_o = \exp(2\pi i \frac{m}{2^n})$. Primeramente la función

$$h(z) = \frac{z+1}{z-1}$$

cuando se restringe a las z de la forma $e^{i\theta}$, con $0 < \theta < 2\pi$ toma la forma:

$$\frac{z+1}{z-1} = \frac{e^{i\theta}+1}{e^{i\theta}-1} = \frac{(\cos\theta+1)+i\,\mathrm{sen}\,\theta}{(\cos\theta-1)+i\,\mathrm{sen}\,\theta}$$

$$= -i\,\mathrm{cotg}\,\frac{\theta}{2}$$

O sea, $h(e^{i\theta}) = -i\,\mathrm{cotg}\,\frac{\theta}{2}$.

La función $\mathcal{T}(z) = \exp(-\exp i\,(\frac{z+1}{z-1}))$ tiene las siguientes propiedades:

i) $\mathcal{T}(z) = \exp\left[-\exp(\mathrm{cotg}\,\frac{\theta}{2})\right]$ para los z de la - forma $z = e^{i\theta}$, con $0 < \theta < 2\pi$

ii) $\mathcal{T}(z) \to 0$ para $\theta \to 0$ y $z \in T$

$\mathcal{T}(z) \to 1$ para $\theta \to 2\pi$ y $z \in T$

iii) $\mathcal{T}$ es analítica en $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ y acotada en $\bar{\Delta} \mid \{1\}$.

Por lo que $\mathcal{T} \in \mathcal{C}$. Entonces la función $\mathcal{T}_{z_o}$ definida por- $\mathcal{T}_{z_o}(z) = \exp\left[-\exp i(\frac{z+z_o}{z-z_o})\right]$ que es similar a $\mathcal{T}$, tiene límite en z_o a la derecha que es igual a 0, y a la izquierda en z_o y es igual a 1. Además está en $\mathcal{C}$. La función $S(\mathcal{T}_{z_o})$ separa a x e y .

Así, hemos probado que A es un álgebra uniforme sobre K. Nos queda probar que $A \neq C(K)$. Sea $\lambda : K \to \mathbb{C}$ la función definida por

$$\lambda(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in K \text{ y } 0 \leq t \leq \frac{1}{3} \\ 1 & \text{si } t \in K \text{ y } \frac{2}{3} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Es claro que $\lambda \in C(K)$. Afirmamos que $\lambda \notin A$. Si λ estubiese en A existiría $g \in C(K)$ tal que $\lambda = S(g)$. Por la definición de g y de λ tenemos que

$$g(\exp(2\pi i\, t)) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < t < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{2} < t < 1 \end{cases}$$

La cual no puede estar en $\mathcal{C}$, de acuerdo a la defineción de $H^{\infty}(T)$ (ver [1]). Así, obtenemos que $A \neq C(K)$.

R E F E R E N C I A S

[1] K. HOFFMAN : Banach Spaces of Analytic Fuctions, Prentil e-Hill, Inglewood Cliffs (N.j) 1962.

[2] W. RUDIN : Subalgebras of Spaces of Continuous functions Proc. Amer. Math, Soc, I (1956) 825-830

*Ayudado por C.D.C.H. Proyecto Nº C-100-78