NOTAS DE MATEMATICA

Nº 50

ISOMETRIAS Y CARACTERIZACION DE ESPACIOS DE HILBERT

POR

ANTONIO TINEO

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
FACULTAD DE CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
MERIDA - VENEZUELA

1981

INTRODUCCION

El propósito de estas notas es mostrar primeramente que un espacio normado real E de dimensión dos es de Hilbert si y sólo si el grupo de isometrías de E es infinito. Después consideramos un espacio de Banach real E (de dimensión finita o infinita) y definimos una noción de ortogonalidad. Finalmente demostramos que si todo hiperplano cerrado H de E posee un vector ortogonal $v \neq 0$ entonces E es de Hilbert. La condición de ortogonalidad es $\| x-v \| = \| x+v \|$ si $x \in H$, donde $\| \ \|$ denota la norma de E.

1.- $\mathbb{C}$ denotará el campo de los complejos y S^1 denotará el grupo de complejos de módulo uno. Usaremos los siguientes hechos:

i) Si $w \in S^1$ y $w^n \neq 1$ para cada entero $n \neq 0$ entonces $\{w^n : n \in Z\}$ es denso en S^1 (Z=números enteros).

ii) Para cada entero $p \geq 1$ sea

$$R(p) = \{w \in S^1 : w^p = 1\}$$

Si $N_1 < N_2 < \ldots$ es una sucesión infinita y creciente de enteros positivos entonces $\bigcup_{k=1}^{\infty} R(N_k)$ es denso en S^1.

2.- En lo que sigue, salvo mención contraria, E denotará un espacio normado real de dimensión dos provisto de una norma $x \to \|x\|$, además $\mathcal{L}(E)$ será el espacio de las aplicaciones lineales $\phi: E \to E$ provisto de la norma usual $\|\phi\| = \sup\{\|\phi(x)\| : \|x\| = 1\}$.

Dada una transformación lineal $\phi: E \to E$ denotaremos por $Tr(\phi)$ y $\det(\phi)$ a la traza y determinante de ϕ respectivamente. Recordamos que el polinomio característico de ϕ es $\lambda^2 - T_r(\phi)\lambda + \det(\phi)$ y que las raices de este polinomio son los autovalores de ϕ.

Si $w \in \mathbb{C}$, denotamos por $Re(w)$ (resp. $Im(w)$) a la parte real (resp. imaginaria) de w. Y si $\phi: E \to E$ es lineal con autovalores no reales denotamos por $w_+(\phi)$ (resp. $w(\phi)$ al autovalor de ϕ de parte real positiva (resp. negativa).

Sea $I(E) \subset \mathcal{L}(E)$ el grupo de isometrías de E; hacemos notar enseguida que los autovalores de cada $\phi \in I(E)$ son elementos de S^1. Además $\det(\phi) = \pm 1$ si ϕ es una isometría. Denotamos por $I_+(E)$ al conjunto de isometrías $\phi \in I(E)$ tales que $\det \phi = 1$; de manera análoga se define $I_-(E)$.

3.- <u>LEMA</u>: Si $\phi \in I(E)$ posee auto-valores reales entonces $\phi^2 = I$; además $\phi \in I_-(E)$ si $\phi \neq \pm I$, donde I denota la identidad de E.

DEMOSTRACION: Si $\phi = \pm I$ entonces $\phi^2 = I$ y si $\phi \neq \pm I$ y tiene autovalores reales entonces el conjunto de autovalores de ϕ es $\{1,-1\}$, de aquí $\phi^2 = I$ y det $\phi = -1$. #

Pongamos $w_+(I) = w_-(I) = 1$, $w_+(-I) = w_-(-I) = -1$ y $A(E) = \{w_\pm(\phi): \phi \in I_+(E)\}$. Note que si $\phi \in I_+(E)$ y $\phi \neq \pm I$ entonces los autovalores de ϕ no son reales. (Ver lema 3).

4. PROPOSICION. Si $A(E) = S^1$ entonces E es un espacio de Hilbert.

DEMOSTRACION: Elijamos $w \in S^1$ tal que $w^n \neq 1$ para cada entero $n \neq 0$; podemos suponer que $Im(w) > 0$ y tomar $\phi \in I_+(E)$ tal que $w = w_+(\phi)$. Ya que w es un autovalor de ϕ existen $u, v \in E$ (linealmente independientes) con $\|u\| = 1$ tales que

$$\phi(u) = Re(w)u + Im(w)\,v; \quad \phi(v) = -Im(w)u + Re(w)v .$$

Por otro lado w^n es un autovalor de ϕ^n y

$$\phi^n(u) = Re(w^n)u + Im(w^n)v. \quad \phi^n(v) = -Im(w^n)u + Re(w^n)v .$$

Recordando que ϕ^n es una isometría de E tenemos

$$\| Re(w^n)u + Im(w^n)v\| = \|u\| = 1 \qquad (n \in Z)$$

y como $\{w^n: n \in Z\}$ es denso en S^1 se concluye que

$\| su + tv \| = 1$ si $s + it \in S^1$ $(s,t \in \mathbb{R})$. En consecuencia $\| su + tv \| = \sqrt{s^2 + t^2}$, lo cual prueba que E es Hilbert.
#

5. PROPOSICION. $A(E)$ es un subconjunto cerrado de S^1.

DEMOSTRACION: Sea $\{w_n\}$ una sucesión de $A(E)$ que converge a un elemento $w \in S^1$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $w_n = w_+ (\phi_n)$ para alguna sucesión $\{\phi_n\}$ de $I_+(E)$. Pero como $I_+(E)$ es un compacto de $\mathcal{L}(E)$ podemos admitir que $\{\phi_n\}$ converge a un elemento $\phi \in I_+(E)$. De aquí resulta que $\{w_n\}$ converge a $w_+(\phi)$ de modo que $w = w_+ (\phi) \in A(E)$.
#

Sea $\phi \in I(E)$ tal que $\Phi^n \neq I$ para cada entero $n \neq 0$; diremos que ϕ tiene orden infinito. Si $\Phi \in I(E)$, $\Phi \neq I$ y $\phi^n = I$ para algún entero $n \geq 2$ definimos el orden de ϕ, denotado $\mathrm{ord}(\phi)$, como el más pequeño entero positivo N tal que $\phi^n = I$.

6. COROLARIO: Si $\phi \in I(E)$ tiene orden infinito entonces E es un espacio de Hilbert.

DEMOSTRACION: Por el lema 3 los autovalores de Φ no son reales; pongamos $w = w_+(\phi)$ entonces w^n es un autovalor de ϕ^n así que $D = \{w^n : n \in Z\} \subset A(E)$; pero $w^n \neq 1$ $(n \neq 0)$ porque $\phi^n \neq I$ $(n \neq 0)$, en consecuencia D es denso en S^1 y por la proposición 5 tenemos

$A(E) = S^1$. El resultado se sigue ahora de la proposición 4.

7. COROLARIO: Supongamos que para cada entero $n \geq 3$ existe $\phi \in I(E)$ de orden finito tal que $\mathrm{ord}(\phi) \geq n$ entonces E es Hilbert.

DEMOSTRACION: Existe una sucesión $\{\phi_k\}$ en $I_+(E)$ tal que $N_1 < \ldots < N_k < \ldots$ donde $N_k = \mathrm{ord}(\phi_k)$. Si $R(p) = \{w \in S^1 : w^p = 1\}$ tenemos que $R(N_k) \subset A(E)$ para cada $k \geq 1$; es decir, $A(E)$ contiene un subconjunto denso de S^1, de modo que $A(E) = S^1$.

8. TEOREMA. E es un espacio de Hilbert si y sólo si $I(E)$ es infinito.

DEMOSTRACION: Es fácil probar que si E es Hilbert entonces $I(E)$ es infinito. Supongamos ahora que $I(E)$ es infinito y que E no es Hilbert. Por el corolario 6 sabemos que todo elemento de $I(E)$ es de órden finito y del corolario 7 concluimos que

$$F = \{\mathrm{ord}(\phi) : \phi \in I(E),\ \phi \neq I\}$$

es finito. Por otro lado $I(E)$ es un compacto infinito de $\mathcal{L}(E)$ y por tanto existe una sucesión $\{\Phi_n\}$ de $I(E)$ convergente a un elemento $\Phi \in I(E)$ tal que $\Phi_n \neq \pm \Phi$. En consecuencia $\{\Psi_n = \Phi_n \circ \Phi^{-1}\}$ es una sucesión de $I(E)$ convergente a I con $\Psi_n \neq \pm I$. Ya que $\det(\Psi_n) \longrightarrow 1$ podemos suponer que $\Psi_n \in I_+(E)$ (para cada $n \geq 1$) y por el lema 3 los autovalores de Ψ_n no son reales ($\Psi_n \neq \pm I$). Por otro lado $w_n = w_+(\Psi_n) \longrightarrow 1$ y $w_n \neq 1$ porque w_n no es real; además $\mathrm{ord}(\Psi_n) \in F$ y como F es finito podemos asumir que $\mathrm{ord}(\Psi_n) = p =$ constante. De aquí $w_n^p = 1$, lo cual dice que $w_n \in G = R(p) - \{1\}$; pero G es finito y $w_n \longrightarrow 1$; luego $1 \in G$ lo cual es contradictorio y termina la demostración.

9. <u>NOTAS</u>: Supongamos que E no es un espacio de Hilbert; sabemos que $I(E)$ es un grupo finito.

i) $I_+(E)$ es un grupo de órden par porque $-I$ es un elemento de $I_+(E)$ de órden dos.

ii) Supongamos que $I_-(E) \neq \phi$ y sea $J \in I_-(E)$. Recordando que $J^2 = I$ tenemos que

$$I_+(E) \longrightarrow I_-(E); \quad \phi \longrightarrow \phi \circ J$$

es una biyección, cuya inversa es $\Psi \longrightarrow \Psi \circ J$. En consecuencia el órden de $I(E)$ es múltiplo de cuatro cuando $I_-(E) \neq \phi$.

iii) Si $I_+(E)$ posee un elemento $\Psi \neq I$ de órden impar N entonces $I_+(E)$ posee un elemento ϕ de orden $2N$. Para ello basta poner $N = 2p-1$ y $\phi = -\Psi^p$.

iv) Si E,E' son espacios isométricos entonces $I(E)$, $I(E')$ son grupos isomorfos; pero el recíproco no es cierto como lo muestra el siguiente ejemplo. Sea $E = \mathbb{R}^2$ con la norma del máximo ($\|(x,y)\| = \max\{|x|,|y|\}$ y sea $E' = \mathbb{R}^2$ con la norma $\|(x,y)\| = \frac{1}{2}(\sqrt{x^2+xy+y^2} + \sqrt{x^2-xy+y^2})$.

Entonces $I(E)$, $I(E')$ son grupos abelianos iso - morfos de órden ocho (de hecho isomorfos a $Z_2 \times Z_4$) pero E,E' no son isométricos.

v) Sea $E = \mathbb{R}^2$ provisto de la **norma**

$$\|(x,y)\| = \max\{|x|,|y|\ ,\ \frac{1}{2}\ |6x-2y|\}\ ,$$

un cálculo tedioso muestra que $I_-(E) = \phi$; además parece ser que, $I_+(E) = \{I,-I\}$.

vi) <u>Conjetura</u>. $I_+(E)$ es abeliano.

10. En el resto de estas notas E denotará un espacio de Banach real de dimensión finita o infinita. Diremos que $x,y \in E$ son <u>ortogonales</u> si $\|x-y\| = \|x+y\|$ y en este caso pondremos $x \perp y$. Si $A \subset E$ y $x \in E$ verifican $x \perp y$ para cada $y \in A$ ponemos $x \perp A$. Dos subconjuntos A,B de E se dicen ortogonales si $x \perp y$ cualesquiera sean $x \in A$ e $y \in B$.

En lo que sigue F denotará un subespacio cerrado de

E; diremos que F posee complemento orotogonal si existe un subespacio G de E tal que: (i) F y G son ortogonales y (ii) todo $x \varepsilon E$ se escribe en la forma $x=y+z$ con $y \varepsilon G$ y $z \varepsilon G$. (Observe que $F \cap G = \{0\}$ así que E es la suma directa algebraica de F y G.

11. PROPOSICION: Si F posee un complemento ortogonal G y $x \perp F$ entonces $x \varepsilon G$.

DEMOSTRACION: Podemos escribir $x = y_o + z_o$ con $y_o \varepsilon F$ y $z_o \varepsilon G$; ahora, para cada entero $n \geq 0$ se tiene

$$\| z_o - 2ny_o \| = \| z_o + 2ny_o \| = \| x + (2n+1)y_o \| =$$

$$= \| x-(2n+1)y_o \| = \| z_o - 2(n+1)y_o \|$$

y utilizando inducción concluimos que

$$\| z_o \| = \| z_o - 2ny_o \|$$

para cada entero $n \geq 0$. Dividiendo esta última igualdad por n (para $n \geq 1$) y tomando límite para $n \to \infty$ obtenemos $y_o = 0$ así que $x = z_o \varepsilon G$.

#

12. COROLARIO: Supongamos que F posee un complemento ortogonal G, entonces:

i) G es cerrado y por tanto E es suma directa topológica de F y G. (En particular $\phi(y+z) = y-z$; $y \varepsilon F$, $z \varepsilon G$; es una isometría de E).

ii) Si G' es un complemento ortogonal de F se tiene $G' = G$.

DEMOSTRACION: Trivial. (De la proposición 11 se tiene $G' \subseteq G$ y por el mismo argumento $G \subseteq G'$) .

13. TEOREMA: Si todo hiperplano cerrado H de E posee un complemento ortogonal entonces E es Hilbert.

DEMOSTRACION: Para cada espacio normado F denotaremos por $S(F)$ al conjunto de vectores de F de norma uno. Dada $f \in S(E^*)$ (E^* = dual de E), sea H el Kernel de f, entonces H es un hiperplano cerrado de E y por el corolario 12 existe un único elemento $v = v_f \in S(E)$ tal que $v \perp H$ y $f(v) > 0$.

Sea $f_o: E \to \mathbb{R}$ la aplicación lineal contínua dada por $f_o(y+\lambda v) = \lambda$; donde $y \in H$, $\lambda \in \mathbb{R}$. De la relación

$$\| y + \lambda v \| = \| y - \lambda v \| \tag{i}$$

se obtiene $\|f_o\| \leq 1$ y como $f_o(v) = 1$ concluimos que $\|f_o\| = 1$. Por otro lado $H = \operatorname{Ker} f_o$ de modo que $f = \pm f_o$ y por tanto $f = f_o$, puesto que $f(v) > 0$. Nótese también que de la relación (a) se obtiene que $\phi_f: E \to E$; $\phi_f(x) = x - 2f(x)v_f$; es una isometría; luego $\| \alpha \circ \phi_f \| = \| \alpha \|$ para cada $\alpha \in E^*$. Pero $\alpha\, \phi_f(x) = \alpha(x) - 2f(x)\, \alpha(v_f)$, lo cual dice que

$$\| \alpha - 2\alpha(v_f)f \| = \| \alpha \| .$$

En otras palabras, dada $f \in S(E^*)$ existe un único $v_f \in S(E)$ tal que $f(v_f) = 1$, $v_f \perp \mathrm{Ker}\, f$ y $\Psi_f: E^* \longrightarrow E^*$; $\Psi_f(\alpha) = \alpha - 2\alpha\,(v_f)f$; es una isometría de E^*.

Dado un plano P de E^* (dim P=2) y $f \in S(P)$ tenemos que $\overline{\Psi}_f: P \to P$; $\overline{\Psi}_f(\alpha) = \Psi_f(\alpha)$; es una isometría de P . Por otro lado la relación $\overline{\Psi}_f = \overline{\Psi}_g$ implica $g = \pm f$ (de hecho $g = f$) y como S(P) es infinito entonces $\{\overline{\Psi}_f : f \in S(P)\}$ es un conjunto infinito de isometrías de P.

De acuerdo al teorema 8 tenemos que todo plano P de E^* es un espacio de Hilbert de suerte que E^* también lo es; probando que E es Hilbert. #

14. <u>COROLARIO</u>: Sea $1 \leq k < \dim E$ un entero fijo y supongamos que todo subespacio cerrado de E de codimensión k posee un complemento ortogonal entonces E es Hilbert.

<u>DEMOSTRACION</u>: (Inducción) para k = 1 no hay nada que probar, supongamos $k \geq 2$. Usando la hipótesis inductiva y fácil probar que todo hiperplano cerrado H de E es un espacio de Hilbert. Por otro lado dim $H \geq 2$ y todo plano de E está contenido en algún hiperplano