NOTAS DE MATEMATICA

Nº 52

UN CONTRAEJEMPLO EN TOPOLOGIA

POR

JORGE VIELMA

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

FACULTAD DE CIENCIAS

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

MERIDA - VENEZUELA

1982

UN CONTRAEJEMPLO EN TOPOLOGIA

En este trabajo vamos a presentar un contraejemplo al Teorema 2.7 del artículo, cuyo autor es el Dr. Robert M. Stephenson, titulado "Pseudocompact spaces" y publicado en la Revista "Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 134 (1968)".

En efecto la traducción textual del Teorema en cuestión es la siguiente:

<u>TEOREMA</u>.

Sea X un espacio completamente regular. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

1) X es pseudocompacto.

2) Siempre que X se pueda sumergir en un espacio Y Hausdorff (regular, completamente regular) y si $Y-X$ es primero contable, entonces X es un subespacio cerrado de Y.

El espacio Ψ y su compactificación por un punto Ψ^* (descritos en el apendice), tienen las siguientes propiedades:

1) Ψ es pseudocompacto, primero contable, completamente regular y Hausdorff.

2) Ψ^* es completamente regular, Hausdorff. y,

3) $\Psi^* - \Psi$ es primero contable.

Sin embargo ψ es un subespacio denso en ψ^*. En consecuencia no puede ser un subespacio cerrado en ψ^*.

A continuación vamos a dar una reformulación que hace verdadero - al Teorema anterior.

TEOREMA 3.1.

Sea X un espacio completamente regular. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

1) X es pseudocompacto.

2) Siempre que X se pueda sumergir en un espacio Y Hausdorff (regular, completamente regular) y si todo $z \in Y - X$ posee un sistema fundamental numerable de vecindades abiertas en Y, entonces X es un subespacio cerrado de Y.

DEMOSTRACION.

(1) $\Longrightarrow$ (2). Supongamos que X no es cerrado en Y. Entonces - existe un $z \in \bar{X} - X$. Así $z \in Y - X$. Sea Θ un sistema fundamental numerable de vecindades abiertas de z en Y. Asî $\sigma = \Theta|_X$ es una base de filtro numerable abierta en X. Puesto que X es completamente regular y pseudocompacto entonces σ tiene al menos un punto de adherencia $x \in X$, entonces $x \neq z$. Ahora bien, como Y es Hausdorff, entonces existen vecindades disjuntas U y V en Y, tales que $x \in U$, $z \in V$. Ahora como Y es completamente regular entonces existe una vecindad cerrada V' de z, tal que $V' \subset V$.

Pero como Θ es una base local de z entonces existe un $\theta \in \Theta$ tal que $\theta \subset V' \subset V$. Esto implica que $x \notin \overline{\theta \cap X}$ lo cual es una contradiccion

(2) $\Longrightarrow$ (1). Supongamos que X es un espacio Hausdorff que no es pseudocompacto. Entonces existe una base de filtro θ numerable - y completamente regular que es libre. Sea ∞ un objeto que no pertenece a X y sea $Y = X \cup \{\infty\}$, y definamos en Y la siguiente topología: A es abierto en Y si y solo si a) $A \cap X$ es abierto en X y b) si $\infty \in A$ entonces $A \cap X$ contiene algún elemento $G \in \theta$. El único punto de $Y-X$ es ∞, y ciertamente la familia $\{ \{\infty\} \cup G,\ G \in \theta \}$ es una base local de ∞, numerable, de abiertos en Y. Ciertamente X es un subespacio denso en Y.

Veamos que Y es un espacio Hausdorff. Sean p y q en Y. Si - p y q son elementos de X no hay nada que demostrar pues X es Hausdorff. Supongamos que $p = \infty$ y $q \in X$. Como Θ es una familia completamente regular y libre, entonces existe $G \in \Theta$ tal - que $q \notin G$, un $G' \subset G$ $G' \in \Theta$ y una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que

$$f\big|_{G'} \equiv 0 \quad y \quad f\big|_{X-G} \equiv 1.$$

Así $G' \subset f^{\leftarrow}(0)$ que es un cerrado en X. En consecuencia $G' \subset \overline{G'} \subset f^{\leftarrow}(0) \subset G$. Luego $X - f^{\leftarrow}(0)$ y $\{\infty\} \cup G'$ son dos abiertos disjuntos en Y que separan a p y q respectivamente. Por lo tanto Y es Hausdorff.

Probemos ahora que Y es completamente regular. Sean $p \in Y$ y A cerrado en Y tal que $p \notin A$. Consideremos los siguientes casos:

I. Supongamos que $p = \infty$. Entonces $A \subsetneq X$. Así $Y - A$ es un abierto en Y que contiene a ∞, luego X-A es un abierto en X que contiene algún $G \in \Theta$.

De nuevo como Θ es completamente regular existe un $G' \in \Theta$, $G' \subset G$ y una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que

$$f\Big|_{G'} \equiv 0 \quad y \quad f\Big|_{X-G} \equiv 1.$$

Sea $h : Y \to [0,1]$ una función definida por

$$f\Big|_{X} = f \qquad y \qquad h(\infty) = 0.$$

Veamos que h es continua.

Sea U un abierto en $[0,1]$ si $0 \notin U$, entonces $h^{\leftarrow}(U) = f^{\leftarrow}(U)$, $\infty \notin h^{\leftarrow}(U)$, $f^{\leftarrow}(U)$, es abierto en X, luego $h^{\leftarrow}(U)$ es abierto en Y. Si $0 \in U$ entonces $\infty \in h^{\leftarrow}(U)$ luego $h^{\leftarrow}(U) = \{\infty\} \cup f^{\leftarrow}(U)$ y $h^{\leftarrow}(U) \cap X = f^{\leftarrow}(U)$. Ahora como $G' \subset f^{\leftarrow}(U)$ se tiene que $h^{\leftarrow}(U)$ es abierto en Y.

Por lo tanto h es continua y separa a A y P.

II. Supongamos que $p \neq \infty$, y supongamos que $\infty \notin A$. Así $A \subsetneq X$. Como $\infty \notin A$ entonces $Y - A$ es un abierto en Y que contiene a ∞ así $X - A$ contiene un $G \in \Theta$. Pero como Θ es libre, existe un $G^* \in \Theta$ tal que $p \notin G^*$, y puesto que Θ es una base de filtro, entonces existe un $G_* \in \Theta$ tal que $G_* \subset G \cap G^*$. De nuevo como Θ es completamente regular existe un $G_0 \in \Theta$, $G_0 \subset G_*$ y una función continua $h : X \to [0,1]$ tal que $h\big|_{G_0} \equiv 0$ y $h\big|_{X-G_*} \equiv 1$.

Así $G_0 \subset h^{\leftarrow}(0)$ y entonces $\overline{G_0} \subset h^{\leftarrow}(0)$. En consecuencia $p \notin h^{\leftarrow}(0) \cup A$.

Como $h^{\leftarrow}(0) \cup A$ es un cerrado en X y puesto que X es completamente regular existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f(p) = 1$ y $f\big|_{h^{\leftarrow}(0) \cup A} \equiv 0$.

Sea $\sigma : Y \to [0,1]$ una función definida por

$$\sigma\big|_X \equiv f \qquad y \qquad \sigma(\infty) = 0.$$

Veamos que σ es continua.

Sea U un abierto en $[0,1]$ si $0 \notin U$. $\sigma^{\leftarrow}(U) = f^{\leftarrow}(U)$ que es un abierto en X y como $\infty \notin \sigma^{\leftarrow}(U)$ entonces $\sigma^{\leftarrow}(U)$ es abierto en Y. Si $0 \in U$, entonces

$$\sigma^{\leftarrow}(U) = \{\infty\} \cup f^{\leftarrow}(U).$$

Pero como $f^{\leftarrow}(U)$ es abierto en X y $G_0 \subset f^{\leftarrow}(U)$, se tiene - que $\sigma^{\leftarrow}(U)$ es abierto en Y.

III. Por último si $p \neq \infty$ y $\infty \in A$, entonces $A \cap X$ es cerrado en X, y por el caso anterior existe una función continua $\sigma : Y \to [0,1]$ tal que $\sigma(P) = 1$ y $\sigma(A) \equiv 0$.

Por lo tanto Y es completamente regular que posee à X como un subespacio denso lo cual contradice a (3). Por lo tanto X es pseudocompacto.

APENDICE

EL ESPACIO ψ

APENDICE

EL ESPACIO Ψ

TEOREMA A1.

Existe una familia $\mathcal{L}$ infinita, de subconjuntos de $\mathbb{N}$ con las siguientes propiedades:

1) Si $A \in \mathcal{L}$ entonces $|A| = \chi_0$.

2) Si $A, B \in$, $A \neq B$ entonces $|A \cap B| < \chi_0$.

3) $\mathcal{L}$ es maximal respecto a las propiedades (1) y (2).

DEMOSTRACION.

Sea p un número primo

Consideremos el conjunto

$$A_p = \{ p, p^2, p^3, \ldots \},$$

y definamos la familia

$$\mathcal{A} = \{ A_p : p \text{ primo} \}.$$

La familia $\mathcal{A}$ es infinita y satisface trivialmente las propiedades (1) y (2).

Sea entonces $\mathcal{J} = \{ G \mid \mathcal{A} \subset G$ y tal que G es una familia de subconjuntos de $\mathbb{N}$ que satisface (1) y (2)$\}$.

Resulta evidente de la definición de $\mathcal{J}$ que $\mathcal{J} \neq \emptyset$. Ordenemos parcialmente a $\mathcal{J}$ por inclusión.

Sea ahora $\{\theta_\alpha\}$ una cadena en $\mathcal{J}$. Veamos que $\{\theta_\alpha\}$ tiene una cota superior en $\mathcal{J}$. Sea $\theta = \bigcup_\alpha \theta_\alpha$. Como $\mathcal{A} \subset \theta_\alpha$ para todo α entonces $\mathcal{A} \subset \theta$. Además como cada θ_α satisface las propiedades (1) y (2) del Teorema resulta obvio que θ también las satisfe. En consecuencia $\theta \in \mathcal{J}$.

Así por el Lema de Zorn existe un elemento maximial en $\mathcal{J}$. Llamemos a dicho elemento $\mathcal{B}$.

Sea $D = \{ w_E \}_{E \in \mathcal{B}}$ un nuevo conjunto de puntos distintos y definamos

$$\psi = \mathbb{N} \cup D,$$

con la siguiente Topologia: Los puntos de $\mathbb{N}$ son aislados y cualquier vecindad de w_E es cualquier conjunto que contiene E y todos los elementos de E excepto por un número finito de ellos. Así $E \cup \{ w_E \}$ es la compactificación por un punto de E y $\mathbb{N}$ es obviamente un subespacio denso de ψ. Por otra parte es evidente que ψ satisface el primer axioma de enumerabilidad.

<u>TEOREMA A2</u>.

El espacio ψ es Hausdorff.

Sean p y q elementos distintos de ψ. Consideremos los siguientes casos:

1) Si p y q son elementos de $\mathbb{N}$, entonces $\{p\}$ y $\{q\}$ son dos vecindades disjuntas que los separan.

2) Si $p \in \mathbb{N}$ y $q \in D$, podemos tomar en q el menor entero n tal que $p < n$. Así $\{p\}$ y $\{q\} \cup \{ x \in q \mid n \leq x \}$, son vecindades disjuntas que los separan.

3) Si $p \in D$ y $q \in D$ y como $p \neq q$ entonces por hipotesis $|p \cap q| < \aleph_0$. Sean entonces $m_1, m_2, \ldots, m_k$ los elementos comunes a ambos conjuntos y supongamos sin perdida de la generalidad que m_k es el máximo de ellos. Así

$$\{p\} \cup p - \{ m \in p \mid m < m_k \} \quad \text{y}$$

$$\{q\} \cup q - \{ n \in q \mid n < m_k \}$$

son dos abiertos disjuntos que separan a p y q.

Por lo tanto ψ es un espacio Hausdorff.

<u>TEOREMA A3</u>.

El espacio ψ es un espacio localmente compacto.

Sea $p \in \psi$. Consideremos los siguientes casos:

1) Si $p \in \mathbb{N}$ obviamente una vecindad compacta de p es $\{p\}$.

2) Si $p \in D$, entonces el conjunto $\{p\} \cup p$ es una vecindad compacta.

En consecuencia ψ es localmente compacto.

OBSERVACION.

Como ψ es localmente compacto y Hausdorff entonces ψ es completamente regular.

TEOREMA A4.

Si $P \subset \mathbb{N}$ y $|P| = \chi_0$, entonces existe un $w_E \in D$ tal que $|w_E \cap P| = \chi_0$.

DEMOSTRACION.

Supongamos, por el contrario, que para todo $w_E \in D$.
$|w_E \cap P| < \chi_0$. Entonces se tiene que $P \notin \mathcal{V}$, pues de lo contrario se tendría que en particular $|P \cap P| < \chi_0$ lo cual contradice el hecho que $|P| = \chi_0$.

Consideremos así la colección $\mathcal{B} = \mathcal{V} \cup \{P\}$. Esta colección satisface obviamente las propiedades (1) y (2) de $\mathcal{V}$. Luego por la maximalidad de $\mathcal{V}$ se tiene que $\mathcal{B} \subset \mathcal{V}$ lo cual es una contradicción.

TEOREMA A5.

Si K es un subespacio compacto de ψ, entonces $|K| \leq \chi_0$.

DEMOSTRACION.

Sea K un subespacio compacto de ψ. Ahora como cada punto de

ψ tiene una vecindad abierta numerable θ_p entonces la colección $\beta = \{\theta_p : p \in K\}$, es un cubrimiento abierto de K y como K es compacto, entonces β se puede reducir a un cubrimiento finito β', por lo tanto

$$|K| \leq \sum_{\theta \in \beta'} |\theta| \leq \chi_0 .$$

TEOREMA A6.

El espacio ψ no es numerable.

DEMOSTRACION.

Supongamos que ψ es numerable. Entonces la familia $\mathcal{Y}$ es numerable. Así digamos que los elementos de $\mathcal{Y}$ son

$E_1 = \{ n_{11}, n_{12}, \ldots \}$, $E_2 = \{ n_{21}, n_{22}, \ldots \}$

$E_m = \{ n_{m1} , m_{m2} \ldots \}$. Ahora como $| E_i \cap E_j | < \chi_0 \quad \forall \ i \neq j$,

entonces existe un conjunto infinito $P \subset \mathbb{N}$ tal que $|P \cap E_i| = 1$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Por el Teorema A4, $P \notin \mathcal{Y}$. - En consecuencia la familia $\mathcal{B} = \mathcal{Y} \cup \{ P \}$ satisface las propiedades (1) y (2) de $\mathcal{Y}$ y $\mathcal{Y} \subsetneq \mathcal{B}$ lo cual contradice la maximalidad de $\mathcal{Y}$.

TEOREMA A7.

El espacio ψ es pseudocompacto y no compacto.

DEMOSTRACION.

Puesto que $|\psi| > \chi_0$ entonces por el Teorema A5 ψ no puede ser -

compacto.

Supongamos entonces que Ψ no es pseudocompacto, entonces existe una función continua $f : \Psi \to \mathbb{R}$ no acotada. Ahora bien como $\mathbb{N}$ es denso en Ψ entonces f es no acotada sobre $\mathbb{N}$. Así en virtud del Teorema A4, f no es acotada sobre algun elemento E de $\mathcal{E}$ luego f no sería acotada sobre $E \cup \{ w_E \}$ lo cual es una contradicción por cuanto $E \cup \{ w_E \}$ es compacto.

Como Ψ es un espacio localmente compacto Hausdorff y no compacto, entonces Ψ admite una compartificación por un punto que también es Hausdorff. Denotemos por Ψ^{*} dicha compactificación. - En consecuencia Ψ^{*} es un espacio completamente regular y Hausdorff.

BIBLIOGRAFIA

[1] R.W. BAGLEY, E. H. CONNELL Y J.D. MCKNIGHT. On properties characterizing pseudocompact spaces. Proc. American Mathematical Society 9 (1958).

[2] J. DUGUNDJI. Topology. Allyn and Bacon 1966.

[3] L. GILLMAN Y M. JERISON. Rings of continous functions. Van Nostrand. New York 1960.

[4] E. HEWITT. Rings of Real Valved Functions I. Transactions of the American Mathematical Society 64 (1948).

[5] J. VIELMA Y M. RAJAGOPALAN. Sobre la no existencia de compactificaciones secuenciales Hausdorff que posean una copia de S_n, $n \geq 2$. Tesis de Maestría U.D.O.

[6] R. M. STEPHENSON. Pseudocompact spaces. Trans. of the American Mathematical Society 134 (1968).