NOTAS DE MATEMATICA

Nº 134

COINCIDENCIA DE LOS OPERADORES ABSOLUTAMENTE SUMANTES Y NUCLEARES DEFINIDOS SOBRE C(Ω, X)

POR

WILMAN BRITO

PREPRINT

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
MERIDA-VENEZUELA
1993

COINCIDENCIA DE LOS OPRADORES ABSOLUTAMENTE SUMANTES Y NUCLEARES DEFINIDOS SOBRE $C(\Omega, X)$

Wilman Brito
Universidad de los Andes
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Mérida-**Venezuela**

Contenido

1 INTRODUCCION

El punto de partida de este trabajo lo constituye el siguiente resultado ya conocido:

Teorema: ([DU, p. 175]) *Sea E un espacio de Banach. E tiene la propiedad de Radon-Nikodym si y sólo si para cualquier espacio de Hausdorff compacto Ω, todo operador absolutamente sumante de $C(\Omega)$ en E es nuclear.*

Supongamos ahora que tenemos dos espacios de Banach E y F, ambos de dimensión infinita. En vista del resultado anterior es natural formular la siguiente pregunta:

¿ Bajo qué condiciones sobre E y F se cumple que todo operador absolutamente sumante de $C(\Omega, E)$ en F es nuclear, cualquiera que sea el compacto de Hausdorff Ω ?.

El objetivo de este trabajo consiste en dar una respuesta a la interrogante antes planteada. De modo específico se demuestra que la **solución** al problema mencionado ocurre **si y sólo si E^* es isomorfo a $\ell_1(\Gamma)$, para algún conjunto Γ, y F tiene la propiedad de Radon-Nikodym.**

Comencemos ahora por presentar la organización de este trabajo. En la sección correspondiente a los Preliminares se dan las definiciones y ciertos resultados que se usarán en esta exposición. La siguiente sección se demuestra el resultado principal de este trabajo, el Teorema 3.8, el cual caracteriza a los espacios de Banach, digamos E y F, para los cuales todo operador absolutamente de $C(\Omega, E)$ a F es nuclear, no importando como sea el compacto de Hausdorff Ω. Para lograr tal cometido primero probamos dos resultados previos, los Lemas 3.2 y 3.3. En segundo lugar usamos varios resultados debidos a Lewis-Stegall, Swartz, Saab y Saab-Smith para dar respuesta al problema planteado. Finalmente aplicamos el Teorema 3.8 para obtener otra respuesta a una interrogante formulado por P. Saab en [Sa]. El problema es el siguiente:

Sean E y F espacios de Banach tal que F tiene la propiedad de Radon-Nikodym. Sean Ω un espacio compacto de Hausdorff y $T : C(\Omega, E) \to F$ un operador lineal acotado cuya medida representante G satisface:

(a) $G(B) : E \to F$ es nuclear para cada conjunto de Borel B de Ω, y

(b) G es de variación acotada como una medida vectorial tomando sus valores en $\mathcal{N}(E, F)$ con respecto a la norma nuclear $|| \, ||_{nuc}$.

¿ Es T un operador nuclear ?

En [Sa], P. Saab da una respuesta a dicha interrogante si se supone que F es, además, complementado en su bidual. ¿ Qué ocurre si suprimimos la hipótesi de que F sea complementado en su bidual ?. Nosotros también obtenemos una respuesta a dicha interrogante, como consecuencia de nuestro resultado principal, si pedimos que F tenga sólamente la propiedad de Radon-Nikodym pero que E^* sea isomorfo a $\ell_1(\Gamma)$ para algún Γ.

2 PRELIMINARES

Sean E y F espacios de Banach y sea Ω un espacio de Hausdorff compacto. Por $C(\Omega, E)$ denotaremos al espacio de Banach de todas las funciones continuas a valores vectoriales $f : \Omega \to E$, provisto de la norma del supremo; esto es $||f||_\infty = \sup\{||f(\omega)|| : \omega \in \Omega\}$ para cada $f \in C(\Omega, E)$. Si E es el campo de los escalares, entonces $C(\Omega, E)$ será denotado por $C(\Omega)$. Al espacio de Banach de todos los operadores (= transformación lineal acotada) T de E en F dotado de la norma $||T||_{op} = \sup\{||Tx|| : x \in E,\ ||x|| \leq 1\}$, será denotado por $L(E, F)$. Cuando F es el campo de los escalares escribiremos E^* en lugar de $L(E, F)$ y llamaremos a E^* el dual de E.

Un elemento T de $L(E, F)$ se dice que es **nuclear** si existen sucesiones (x_n^*) en E^* y (y_n) en F tales que para todo $x \in E$,

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x)\, y_n \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} ||x_n^*||\, ||y_n|| < \infty. \tag{1}$$

La **norma nuclear** de un operador nuclear $T : E \to F$ se define por

$$||T||_{nuc} = \inf \sum_{n=1}^{\infty} ||x_n^*||\, ||y_n||,$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las sucesiones (x_n^*) y (y_n) de E^* y F respectivamente que satisfacen (1). La clase de todos los operadores nucleares de E en F constituyen un espacio de Banach bajo la norma nuclear [DU, p. 170] y la denotaremos por $\mathcal{N}(E, F)$.

Un operador T en $L(E, F)$ se llama **absolutamente sumante** si existe una constante $K \geq 0$ tal que si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es cualquier conjunto finito de E, entonces

$$\sum_{i=1}^{n} ||Tx_i|| \leq K \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} |x^*(x_i)| : x^* \in E^*,\ ||x^*|| \leq 1\right\}. \tag{2}$$

La menor de las constantes $K \geq 0$ que satisfacen la desigualdad (2) es llamada la **norma absolutamente sumante** de T, y denotada por $||T||_{as}$. La clase $\mathcal{AS}(E, F)$, formada por todos los operadores absolutamente sumante de E en F, resulta ser un espacio de Banach bajo la norma $||\,||_{as}$ [DU, p. 162].

Es bien conocido que para todo par de espacios de Banach E y F,

$$\mathcal{N}(E, F) \subseteq \mathcal{AS}(E, F) \tag{3}$$

y

$$||T||_{as} \leq ||T||_{nuc}, \quad \text{para todo} \quad T \in \mathcal{N}(E, F).$$

Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ en un espacio de Banach E se denomina **debilmente incondicionalmente convergente** (respectivamente, **incondicionalmente convergente**) si

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x^*(x_n)| < \infty \quad \text{para todo} \quad x^* \in E^*$$

(respectivamente, si

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$$

es norma-convergente, para cualquier permutación π de los números naturales). También diremos que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es **absolutamente convergente** si

$$\sum_{n=1}^{\infty} ||x_n|| < \infty.$$

Una caracterización bastante conocida acerca de los operadores absolutamente sumantes es la siguiente ([DU, p.162]):

Para un operador $T : E \to F$ las siguiente condiciones son equivalentes:

(i) T *es absolutamente sumante.*

(ii) T *transforma series debilmente incondicionalmente convergentes en series absolutamente convergentes.*

(iii) T *transforma series incondicionalmente convergentes en series absolutamente convergentes.*

Un operador $T : C(\Omega, E) \to F$ se llama **dominado** si existe una medida de Borel regular μ sobre $Bo(\Omega)$ (= la σ-algebra de Borel en Ω) tal que

$$||Tf|| \leq \int_{\Omega} ||f(\omega)||_{\infty} \, d\mu(\omega)$$

para toda $f \in C(\Omega, E)$.

El tratamiento básico sobre este tipo de operadores puede ser enccontrado en [Di, Chap. III, p. 380].

Finalmente, un espacio de Banach E se dice que tiene la **Propiedad de Radon-Nikodym** si para cualquier espacio de medida finita (S, Σ, μ) y cualquier medida vectorial $m : \Sigma \to E$ de variación acotada y absolutamente continua con respecto a μ, existe una función Bochner-integrable $f : S \to E$ tal que

$$m(A) = \int_A f \, d\mu$$

para todo $A \in \Sigma$.

Todas aquellas nociones referentes a medidas vectoriales, funciones Bochner- integrables y otras no definidas explicitamente en este trabajo pero que de alguna forma son mencionadas o usadas sin explicación alguna pueden ser consultadas en [DU].

3 COINCIDENCIA DE LOS OPERADORES

Como afirmaramos en la introducción, el objetivo de este trabajo es poder caracterizar aquellos espacios de Banach de dimensión infinita, digamos E y F, de modo que todo operador absolutamente sumante de $C(\Omega, E)$ a F sea nuclear, cualquiera que sea el compacto de Hausdorff Ω. Esta tarea requiere, en primer lugar, de una motivación. Posteriormente pasaremos revista a ciertos hechos ya establecidos, probaremos algunos nuevos y finalmente armaremos todo estos resultados para dar respuesta a dicha caracterización.

MOTIVACION. El siguiente resultado establece que la presencia de la propiedad de Radon-Nikodym es necesaria y suficiente en la coincidencia de los operadores absolutamente sumantes y nucleares definidos sobre $C(\Omega)$. Especificamente tenemos el siguiente resultado.

Proposición 3.1 [*DU*, *Corollary* 7, *p.* 175] *Para un espacio de Banach F las siguientes condiciones son equivalentes:*
(i) F tiene la propiedad de Radon-Nikodym.
(ii) $\mathcal{AS}(C(\Omega), F) = \mathcal{N}(C(\Omega), F)$ para cualquier espacio compacto de Hausdorff Ω.

Este resultado motiva la siguiente interrogante: *¿ Qué propiedades deberán poseer los espacios de Banach E y F para que cualquier operador absolutamente sumante de $C(\Omega, E)$ a F sea nuclear, cualquiera que sea el compacto de Hausdorff Ω?*. La respuesta, como veremos en el Teorema 3.8, es que E^* sea isomorfo a $\ell_1(\Gamma)$ para algún Γ y que F tenga la propiedad de Radon-Nikodym.

LOS PREPARATIVOS.

Aprovechando la Proposición 3.1, vamos de inmediato a demostrar que la ausencia de la propiedad de Radon-Nikodym en el espacio de Banach F dá origen a la existencia de un operador absolutamente sumante de $C(\Omega, E)$ a F que no es nuclear, para algún compacto de Hausdorff Ω.

Lema 3.2 *Sean E y F espacios de Banach y suponga que F no posee la propiedad de Radon-Nikodym. Entonces existen un compacto de Hausdorff Ω y un operador absolutamente sumante $T : C(\Omega, E) \to F$ que no es nuclear.*

Prueba: Puesto que F no tiene la propiedad de Radon-Nikodym, la Proposición 3.1 nos garantiza la existencia de un espacio compacto de Hausdorff Ω y de un operador absolutamente sumante $S : C(\Omega) \to F$ el cual no es nuclear. La construcción de un operador absolutamente sumante $T : C(\Omega, E) \to F$ que no es nuclear a través de S se ejecutará del modo siguiente. Fijemos un y en E, $y \neq 0$, y elijamos un $y^* \in E^*$ tal que $y^*(y) = 1$. Definamos ahora $T : C(\Omega, E) \to F$ por

$$T(f) = S(y^* \circ f)$$

para toda $f \in C(\Omega, E)$. Para demostrar que T es absolutamente sumante, sea $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ una serie incondicionalmente convergente en $C(\Omega, E)$. Se prueba fácilmente que

$$\sum_{n=1}^{\infty} y^* \circ f_n$$

es una serie incondicionalmente convergente en $C(\Omega)$ y puesto que S es absolutamente sumante se sigue que

$$\sum_{n=1}^{\infty} ||S(y^* \circ f_n)|| < \infty,$$

lo cual nos muestra que

$$\sum_{n=1}^{\infty} ||T(f_n)|| < \infty;$$

es decir, T es absolutamente sumante.

Para ver que T no es nuclear procedamos del modo siguiente. Supongamos que T es nuclear y entonces elijamos sucesiones $(\psi_n^*)_{n=1}^{\infty}$ en E^* y $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ en F tales que

$$T(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n^*(f)\, y_n, \qquad f \in C(\Omega, E)$$

y

$$\sum_{n=1}^{\infty} ||\psi_n^*||\, ||y_n|| < \infty.$$

Observemos que para toda $\varphi \in C(\Omega)$ y toda $x \in E$ se verifica que $T(x\varphi) = y^*(x)S(\varphi)$. En particular,

$$T(y\varphi) = S(\varphi).$$

Finalmente, definiendo $x_n^* : C(\Omega) \to \mathbf{K}$ mediante la fórmula

$$x_n^*(\varphi) = \psi_n^*(y\varphi)$$

para toda $\varphi \in C(\Omega)$, $n = 1, 2, \ldots$, se verifica que

$$||x_n^*|| \leq ||y|| \, ||\psi_n^*||, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

lo cual nos muestra que la sucesión $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ está en $C(\Omega)^*$ y en consecuencia,

$$\begin{aligned} S(\varphi) &= T(y\varphi) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n^*(y\varphi) y_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(\varphi) y_n. \end{aligned}$$

Más aún,

$$\sum_{n=1}^{\infty} ||x_n^*|| \, ||y_n|| \leq ||y|| \sum_{n=1}^{\infty} ||\psi_n^*|| \, ||y_n|| < \infty,$$

revelándonos que S es nuclear. Esta contradicción establece que T no puede ser nuclear y termina la prueba. ♠

La demostración del resultado principal también requiere del siguiente resultado.

Lema 3.3 *Sean E y F espacios de Banach y Ω un espacio compacto de Hausdorff. Si*

$$\mathcal{AS}(C(\Omega, E), F) = \mathcal{N}(C(\Omega, E), F),$$

entonces $\mathcal{AS}(E, F) = \mathcal{N}(E, F)$.

Prueba: Puesto que $\mathcal{N}(E, F) \subseteq \mathcal{AS}(E, F)$ sólo nos resta probar la inclusión recíproca. Sea entonces $T : E \to F$ un operador absolutamente sumante. Fijemos t_0 en Ω y elijamos una φ en $C(\Omega)$ tal que $\varphi(t_0) = 1$. Definamos $S : C(\Omega, E) \to E$ por

$$S(f) = f(t_0), \qquad f \in C(\Omega, E).$$

Puesto que S es claramente un operador lineal acotado y T es absolutamente sumante, se sigue de [DU, p. 162] que el operador

$$V : C(\Omega, E) \to F$$

definido por $V = T \circ S$ es absolutamente sumante y así, por hipótesis, nuclear. Seleccionemos entonces sucesiones (ψ_n^*) en $C(\Omega, E)^*$ y (y_n) en F que cumplan

$$V(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n^*(f)\, y_n, \qquad f \in C(\Omega, E)$$

y

$$\sum_{n=1}^{\infty} ||\psi_n^*||\, ||y_n|| < \infty.$$

Para cada $n = 1, 2, \dots$, definamos $x_n^* : E \to \mathbf{K}$ por

$$x_n^*(x) = \psi_n^*(x\varphi), \qquad x \in E.$$

Puesto que $||x_n^*|| \leq ||\varphi||\, ||\psi_n^*||$, $n = 1, 2, \dots$ vemos que (x_n^*) es, en efecto, una sucesión que vive en E^*, y como $T(x) = V(x\varphi)$ para todo $x \in E$ se concluye que

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x)\, y_n, \qquad x \in E$$

y

$$\sum_{n=1}^{\infty} ||x_n^*||\, ||y_n|| < \infty.$$

Esto demuestra que T es nuclear y termina la prueba. ♠

Con el objeto se hacer la presentación de la prueba de nuestro resultado principal lo más clara posible, permitanos presentar ahora los resultados ya conocidos. Comencemos con la siguiente:

Proposición 3.4 [*LS*, *Theorem* 1, *p.* 181]. *Sea E un espacio de Banach. Las siguientes condiciones son equivalentes:*
(a) E^* es isomorfo a $\ell_1(\Gamma)$, para algún Γ.
(b) $\mathcal{AS}(E, F) = \mathcal{N}(E, F)$ para cualquier espacio de Banach F.

Para completar el cuadro de resultados a ser utilizados, debemos recordar algunos hechos conocidos. En [Di, p. 380] se encuentra el siguiente resultado:

Si $T : C(\Omega, E) \to F$ es un operador lineal acotado, entonces existe un único operador lineal acotado $T^{\#} : C(\Omega) \to L(E, F)$ tal que

$$(T^{\#}\varphi)(x) = T(x\varphi)$$

para todo $\varphi \in C(\Omega)$ y todo $x \in E$.

Más aún, T es dominado si y sólo si $T^{\#}$ es dominado. Una preguntar natural es: ¿ Qué ocurre si T es nuclear o absolutamente sumante?; esto es, si T es nuclear o absolutamente sumante, ¿ se comporta $T^{\#}$ de la misma manera y recíprocamente? He aquí las respuestas dadas por C. Swartz para el caso absolutamente sumante, y por P. Saab y B. Smith para el caso nuclear.

Proposición 3.5 [*Sw*, *Theorem* 2, *p.* 130]. *Sean E y F espacios de Banach y sea Ω un espacio compacto de Hausdorff. Sea $T : C(\Omega, E) \to F$ un operador lineal acotado. Las siguientes condiciones son equivalentes:*
(a) T es absolutamente sumante.
(b) $T^{\#} : C(\Omega) \to \mathcal{AS}(E, F)$ es absolutamente sumante.

Proposición 3.6 [*SS*, *Theorem* 5, *p.* 229] *Sean E y F espacios de Banach. Las siguientes condiciones son equivalentes:*
(a) E^* tiene la propiedad de Radon-Nikodym.
(b) Para todo espacio compacto de Hausdorff Ω, $T : C(\Omega, E) \to F$ es nuclear si y sólo si $T^{\#} : C(\Omega) \to \mathcal{N}(E, F)$ es nuclear.

Finalmente haremos uso del siguiente resultado de K. Andrews [An], para el caso $p = 1$.

Proposición 3.7 [*An*, *Theorem* 8, *p.* 121] *Sean E y F espacios de Banach. Si E^* y F poseen la propiedad de Radon-Nikodym, entonces $\mathcal{AS}(E, F)$ también la posee.*

EL RESULTADO PRINCIPAL

Estamos ahora listo para formular y probar nuestro resultado principal.

Teorema 3.8 *Sean E y F espacios de Banach. Las siguientes condiciones son equivalentes:*
(1) E^* es isomorfo a $\ell_1(\Gamma)$, para algún Γ, y F tiene la propiedad de Radon-Nikodym.
(2) $\mathcal{AS}(C(\Omega, E), F) = \mathcal{N}(C(\Omega, E), F)$, para cualquier compacto de Hausdorff Ω.

Prueba: Supongamos que (1) se cumple. Sean Ω un espacio de Hausdorff compacto y

$$T : C(\Omega, E) \to F$$

un operador absolutamente sumante. Por la Proposición 3.5,

$$T^{\#} : C(\Omega) \to \mathcal{AS}(E, F)$$

es absolutamente sumante. Ahora bien, como $\ell_1(\Gamma)$ tiene la propiedad de Radon-Nikodym [DU, Corollary 8, p.83] y dicha propiedad es invariante por isomorfismo [DU, p. 205], se sigue que E^* posee la propiedad de Radon-Nikodym. Un llamado a la Proposición 3.7 nos revela que $\mathcal{AS}(E, F)$ también disfruta de la propiedad de Radon-Nikodym, y así, gracias a la Proposición 3.1, $T^{\#}$ es nuclear. Por otro lado, ya que E^* es isomorfo a $\ell_1(\Gamma)$, la Proposición 3.4 nos permite concluir que

$$\mathcal{AS}(E, F) = \mathcal{N}(E, F)$$

y puesto que

$$||S||_{as} \leq ||S||_{nuc}$$

para todo $S \in \mathcal{N}(E, F)$, entonces el Teorema del Gráfico Cerrado nos asegura que

$$(\mathcal{AS}(E, F), ||\ ||_{as}) \quad \text{es isomorfo a} \quad (\mathcal{AS}(E, F), ||\ ||_{nuc}),$$

lo cual nos conduce a afirmar que $T^{\#}$ toma sus valores en $(\mathcal{N}(E, F), ||\ ||_{nuc})$. Finalmente, uno invoca a la Proposición 3.6 para concluir que T es nuclear.

Supongamos ahora que (2) se cumple. Por el Lema 3.3 sabemos que

$$\mathcal{AS}(E, F) = \mathcal{N}(E, F). \tag{4}$$

Sea G un espacio de Banach arbitrario y sea $S : E \to G$ un operador absolutamente sumante. Queremos ver que S es nuclear. Pero si $R : G \to F$ es cualquier operador lineal acotado, entonces $R \circ S : E \to F$ es absolutamente sumante y en consecuencia, por (4), nuclear.

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "S"] \arrow[dr, "R \circ S"'] & G \arrow[d, "R"] \\
& F
\end{tikzcd}$$

Puesto que $R \circ S$ es nuclear para todo $R \in L(G, F)$ se sigue que S es, en efecto, nuclear ([Pi, Part 1, Section 3]). Finalmente, la Proposición 3.4 nos obliga a aceptar que E^* es isomorfo a $\ell_1(\Gamma)$, para algún Γ.

Por otro lado, la no poseción de la propiedad de Radon-Nikodym por parte de F nos revela la existencia, gracias al Lema 3.2, de un espacio compacto de Hausdorff Ω y de un operador absolutamente sumante

$$T : C(\Omega, E) \to F$$

que no es nuclear, violando así nuestra hipótesis. Por esto F tiene la propiedad de Radon-Nikodym y termina la prueba. ♠

4 UNA APLICACION

Para dar una aplicación del resultado antes probado, será necesario recordar el siguiente hecho (ver [DU, p. 182]):

Sean E y F espacios de Banach y sea Ω un espacio compacto de Hausdorff. Cualquier operador lineal acotado

$$T : C(\Omega, E) \to F$$

determina una única medida vectorial

$$G : \Sigma \to L(E, F^{**}),$$

donde Σ es la σ-algebra de Borel de Ω, tal que G es finitamente aditiva, de semi-variación acotada y se verifica además que,

$$T(f) = \int_\Omega f\, dG \quad \textit{para toda} \quad f \in C(\Omega, E).$$

La medida G así obtenida se le llama la **medida representante de** T.

Los siguientes resultados son conocidos.

Proposición 4.1 [*Sw, Theorem* 12, *p.* 130] *Sean E y F espacios de Banach y sea Ω un espacio compacto de Hausdorff. Si $T : C(\Omega, E) \to F$ es un operador lineal acotado con medida representante G, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) T es absolutamente sumante.
(b) Para cada $B \in \Sigma$, $G(B) : E \to F$ es un operador absolutamente sumante y G es de variación acotada como una medida vectorial tomando sus valores en $(\mathcal{AS}(E,F), \| \|_{as})$.

Proposición 4.2 [*SS*, *Proposition* 1, *p.* 225] *Sean E y F espacios de Banach y suponga que Ω es un espacio compacto de Hausdorff. Si $T : C(\Omega, E) \to F$ es un operador nuclear con medida representante G, entonces:*
(a) Para cualquier $B \in \Sigma$, el operador $G(B) : E \to F$ es nuclear.
(b) G es de variación acotada como una medida vectorial tomando sus valores en $(\mathcal{N}(E,F), \| \|_{nuc})$.

Se puede probar que si F no disfruta de la propiedad de Radon-Nikodym, entonces las condiciones (a) y (b) de la Proposición 4.2 no caracterizan a los operadores nucleares definidos sobre $C(\Omega, E)$ ([SS, Proposition 2, p. 226]). Esto motivó a P. Saab a formular la siguiente interrogante:

PREGUNTA: [Sa, *Question* 7, *p.* 11]. *Asuma que F tiene la propiedad de Radon-Nikodym y que $T : C(\Omega, E) \to F$ es un operador lineal acotado cuya medida representante G satisface las condiciones (a) y (b) de la Proposición 4.2. ¿ Es T un operador nuclear?*

En [Sa, Theorem 8, p. 11], Saab dá una respuesta positiva a la PREGUNTA para el caso en que F es complementado en F^{**}.

Otra respuesta a la PREGUNTA se puede obtener si uno suprime la complementabilidad de F en su bidual, por la de que E^* sea isomorfo a $\ell_1(\Gamma)$, para algún Γ. Este es el contenido del siguiente

Corolario 4.3 *Sean E y F espacios de Banach tales que E^* sea isomorfo a $\ell_1(\Gamma)$, para algún Γ y F posea la propiedad de Radon-Nikodym y sea Ω un espacio compacto de Hausdorff. Un operador lineal acotado $T : C(\Omega, E) \to F$ es nuclear si su medida representante G satisface las siguientes condiciones:*
(a) Para cualquier $B \in \Sigma$, el operador $G(B) : E \to F$ es nuclear.
(b) G es de variación acotada como una medida vectorial tomando sus valores en $(\mathcal{N}(E,F), \| \|_{nuc})$.

Prueba: Supongamos que G, la medida representante de T, satisface (a) y (b). Puesto

$$\mathcal{N}(E,F) \subseteq \mathcal{AS}(E,F)$$

se sigue que $G(B) \in \mathcal{AS}(E,F)$ para todo $B \in \Sigma$. Ahora bien, como E^* es isomorfo a $\ell_1(\Gamma)$ para algún Γ, la Proposición 3.4 nos revela que

$$\mathcal{AS}(E,F) = \mathcal{N}(E,F)$$

y gracias a que

$$||S||_{as} \leq ||S||_{nuc}$$

para todo $S \in \mathcal{N}(E,F)$, obtenemos del Teorema del Gráfico Cerrado que

$$(\mathcal{AS}(E,F), ||\,||_{as}) \quad \text{es isomorfo a} \quad (\mathcal{AS}(E,F), ||\,||_{nuc}).$$

Por esto, G es de variación acotada como una medida vectorial que toma sus valores en $(\mathcal{AS}(E,F), ||\,||_{as})$. Un llamado a la Proposición 4.1 nos dice que T es absolutamente sumante, y así, por el Teorema 3.8, T es nuclear. ♠

Referencias

[An] K. T. Andrews, *The Radon-Nikodym property for spaces of operators*, J. London Math. Soc. **28**(1983), 113-122.

[DU] J. Diestel and J. J. Uhl Jr., **Vector Measures**, Mathematical Surveys **15**, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1977.

[Di] N. Dinculeanu, **Vector Measures**, Pergamon Press, New York, 1967.

[LP] J. Lindenstrauss and A. Pelczyński, *Absolutely summing operators in $\mathcal{L}_p$-spaces and their applications*, Studia Math. **29**(1968), 275-326.

[LS] D. R. Lewis and C. Stegall, *Banach spaces whose duals are isomorphic to* $\ell_1(\Gamma)$, J. Funct. Anal. **12**(1973), 177-187.

[Pi] A. Pietsch, **Operator Ideals**, North-Holland, Amsterdam - New York, 1980.

[Sa] P. Saab, *Integral Operators on spaces of continuous vector-valued functions*, (por aparecer).

[SS] P. Saab and B. Smith, *Nuclear operators on spaces of continuous vector-valued functions*, Glasgow Math. J. **33**(1991), 223-230.

[Sw] C. Swartz, *Absolutely summing and dominated operators on spaces of vector-valued continuous functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **179**(1973), 123-131.