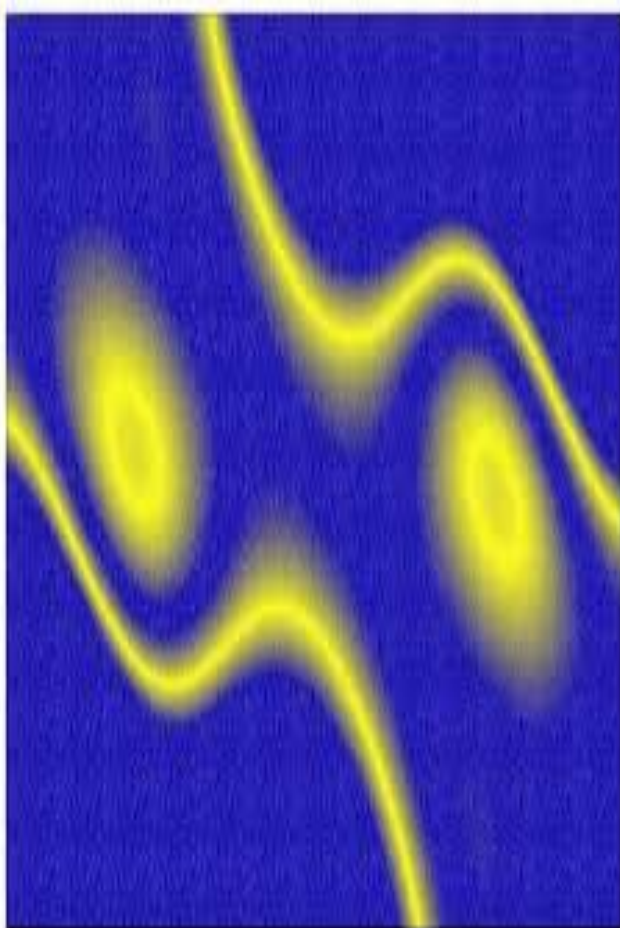


Mecánica del

Movimiento ondulatorio



Autor:

Hebert Lobo

Co-autores:

Manuel Villarreal

Jesús Rosario

Juan C. Terán

Juan E. Lobo

Yenifer Márquez



FONDO EDITORIAL

MECÁNICA DEL MOVIMIENTO ONDULATORIO
Material de Apoyo Teórico

Primera edición, Julio 2013

Publicación Electrónica

www.grincef.nurr.ula.ve/PUBLICACIONES

Este material ha sido rigurosamente revisado y arbitrado por expertos para su publicación

Hebert Lobo

Autor Principal

Manuel Villarreal, Jesús Rosario, Juan C. Terán, Juan E. Lobo, Yenifer Márquez

Co-autores

DATOS INSTITUCIONALES



UNIVERSIDAD
DE LOS ANDES

Núcleo Universitario “Rafael Rangel”

Departamento de Física y Matemática

Área de Física



FONDO EDITORIAL

Grupo de Investigación Científica y de la Enseñanza de la Física

Trujillo, Venezuela

HECHO EL DEPÓSITO DE LEY

Derechos Reservados.

Prohibida la reproducción total o parcial de esta obra sin la autorización escrita del autor principal y el editor.

Impreso en Trujillo – Venezuela

Mecánica del

Movimiento ondulatorio

Autor:

Hebert Lobo

Co-autores:

Manuel Villarreal

Jesús Rosario

Juan C. Terán

Juan E. Lobo

Yenifer Márquez



FONDO EDITORIAL

ÍNDICE

CAPITULO 1: MOVIMIENTO ONDULATORIO, 1

INTRODUCCION, 1

ONDAS, 1

MOVIMIENTO ONDULATORIO, 2

CAPITULO 2: DESCRIPCIÓN DE LA ONDA, 4

INTRODUCCION, 4

FUNCION DE ONDA, 4

ELEMENTOS DE UNA ONDA, 6

ECUACION DE ONDA, 9

CAPITULO 3: CLASES DE ONDAS, 11

INTRODUCCION, 11

SEGÚN LAS CARACTERÍSTICAS DEL MEDIO, 13

**SEGÚN EL MOVIMIENTO DEL MEDIO RESPECTO A LA
DIRECCIÓN DE PROPAGACIÓN, 14**

**SEGÚN EL NÚMERO MINIMO DE DIMENSIONES NECESARIAS
PARA REPRESENTARLA, 16**

SEGÚN LA FORMA O PERFIL DE LA ONDA, 20

SEGÚN LA CANTIDAD FÍSICA QUE REPRESENTA, 21

SEGÚN EL MOVIMIENTO DE SU PERFIL, 22

CAPITULO 4: PROPAGACIÓN DE ONDAS, 24

INTRODUCCION, 24

REFLEXION Y TRANSMISIÓN DE ONDAS EN UNA CUERDA, 24

REFLEXION Y REFRACCIÓN DE ONDAS PLANAS, 26

DIFRACCIÓN DE ONDAS CIRCULARES, 27

CAPITULO 5: INTERFERENCIA Y SUPERPOSICION DE ONDAS, 31

INTRODUCCION, 31

PRINCIPIO DE SUPERPOSICION, 31

METODO ALGEBRAICO, 34

METODO COMPLEJO, 35

SUMA DE FASORES, 36

CASOS DE DOS ONDAS PARALELAS QUE SE MUEVEN EN LA MISMA DIRECCION, 38

CASOS DE DOS ONDAS PARALELAS QUE SE MUEVEN EN DIRECCION CONTRARIA, 45

CAPITULO 1

MOVIMIENTO ONDULATORIO

INTRODUCCION:

Estos apuntes tratarán sobre la definición, características y propiedades de las ondas de manera general, describiendo su propagación y los fenómenos que se presentan como consecuencia de la aproximación ondulatoria.

El propósito general del contenido desarrollado será el de reafirmar algunos conceptos fundamentales tratados con anterioridad por los alumnos en otras asignaturas, conocer los principios generales aplicables a cualquier clase de onda y con ello, sentar las bases para la mejor comprensión de los fenómenos luminosos, que serán tratados con mayor detalle en materiales posteriores.

ONDAS:

Las perturbaciones que se propagan a través de un medio reciben el nombre de ondas. Tales perturbaciones se entienden como la energía dada o producida en un punto que es capaz de propagarse.

Es importante señalar que, si bien es cierto que, en general, las ondas se propagan en un medio como producto de la interacción entre las partículas que lo componen, en el movimiento ondulatorio se propaga la energía y nunca la partícula o punto que ha recibido dicha energía.

De seguro todos hemos tenido oportunidad de observar ondas a nuestro alrededor; las ondas circulares que se forman en el agua tranquila de un pozo o estanque al lanzarle una piedra; las olas de mar y los rizos en una piscina o lago por efecto del viento; las ondas producidas al “batir” una cuerda en sus extremos, incluso el efecto

visual, aunque no es rigurosamente una onda, creado por la “olas” humanas en la graderías de espectáculos deportivos.

Asimismo, tenemos información sobre otra clase de ondas, como las sónicas que son las responsables de que podamos escuchar, las luminosas que nos permiten ver y otras más extrañas como las ondas de radio “cortas” y “largas”, de televisión y las “microondas”, que sirven tanto para comunicaciones telefónicas como para cocinar alimentos.

Todas ellas con características aparentemente muy diferentes, pueden tratarse por medio de las matemáticas ondulatorias, pues reúnen un conjunto de propiedades comunes.

“encontramos dos cosas bien diferenciadas y comunes a todos estos fenómenos: un medio perturbado que oscila en forma de vaivén y que en promedio no se desplaza (puede ser un medio material o un campo eléctrico o magnético en el vacío) y una onda que se desplaza en una dirección, con una velocidad definida, y en general con aceleración nula (a menos que haya bordes o discontinuidades en el medio perturbado).” [BRESSAN, Oscar y GAVIOLA, Enrique: 1975, p. 2].

MOVIMIENTO ONDULATORIO:

Al estudiar los problemas de transformación de la energía, para aprovecharla de la manera más conveniente, surge, como aspecto fundamental, lo relacionado con su transmisión o transporte desde el sitio de producción hasta el de su uso.

En general, existen tres métodos básicos de transmisión: **a)** por movimiento de partículas, **b)** por movimiento de grandes masas de materia y **c)** por movimiento ondulatorio.

El primero de ellos ha sido analizado con propiedad con anterioridad, tanto desde el punto de vista mecánico, sobre la base de las leyes de Newton o los principios de conservación de la energía, la masa y la cantidad de movimiento, como desde la perspectiva de las interacciones de partículas cargadas, que dan origen a los fenómenos eléctricos y magnéticos. El segundo se refiere a los fenómenos asociados al flujo de grandes masas de materia, tales como, las de agua, aire o cualquier otro fluido. Pero, el último método se basa, precisamente, en la existencia de un ente, no material – la onda -, distinta a una partícula (o flujo de partículas), capaz de desplazarse de un punto a otro del

espacio. Por supuesto que, el desplazamiento implica el transporte de energía de un lugar a otro.

Para apreciar mejor esto, analicemos con más detalle la perturbación en la superficie libre de un líquido, como muestra la figura N° 1. Observamos la formación de ondas circulares que surgen y se propagan radialmente con centro en el punto de perturbación. Cada onda circular va aumentando paulatinamente su radio y a medida que avanza parece que su energía fuese disminuyendo hasta desaparecer.

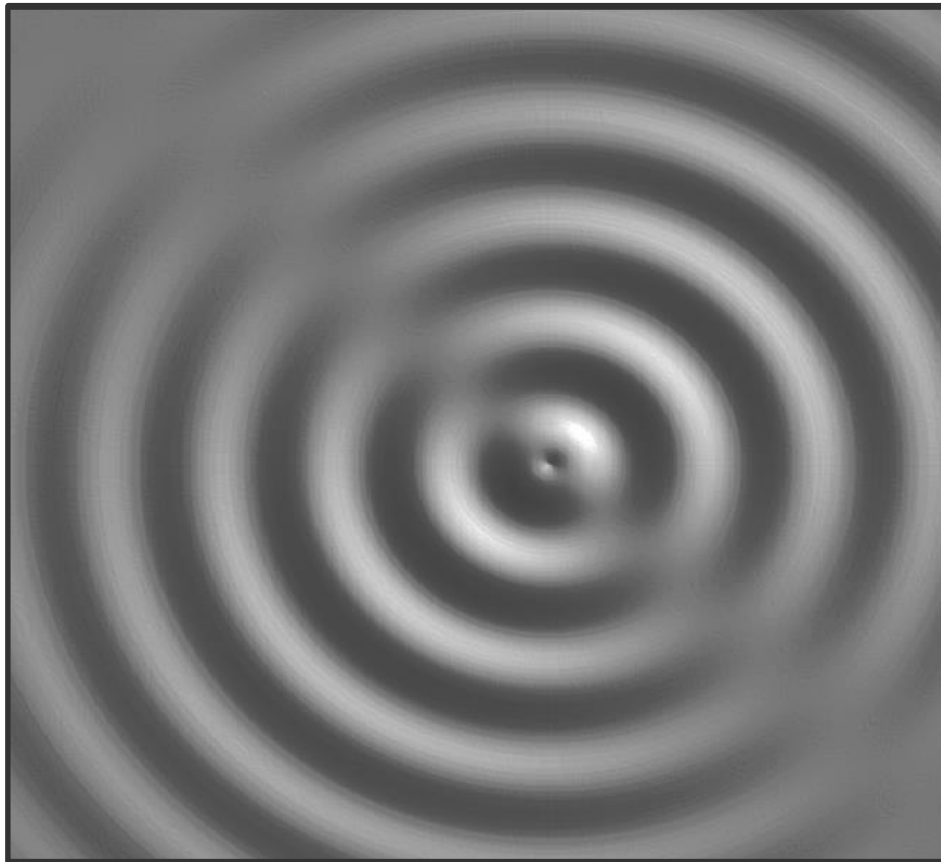


Figura N° 1: *Perturbación de la superficie libre de un líquido*

Si colocamos, un cuerpo flotante en el estanque, como un trozo de corcho, se puede verificar que al hacer contacto con las ondas aquél oscila hacia arriba y abajo, pero, no sufre ningún desplazamiento en la dirección de propagación, por cuanto, como hemos dicho el movimiento ondulatorio no implica el desplazamiento de las partículas del medio según el movimiento de propagación. Por otro lado, ***también se verifica que la onda transporta energía, pues es capaz de poner en movimiento vertical al corcho.***

CAPITULO 2

DESCRIPCIÓN DE LA ONDA

INTRODUCCION:

La representación matemática de una onda puede suponerse complicada, dada la diversidad de cantidades físicas que se pueden expresar como la propagación de una perturbación del medio. Sin embargo, como veremos haciendo algunas consideraciones se pueden generalizar las funciones que representan convenientemente el movimiento ondulatorio de una perturbación y, lo que resultará a la postre más importante, su propagación puede describirse con una ecuación de onda igualmente generalizada para una, dos o tres dimensiones.

FUNCION DE ONDA:

Si hacemos una representación gráfica de la intensidad o magnitud de la perturbación, que llamaremos **función de onda** ξ , de acuerdo a su variación a medida que se desplaza en una dirección particular del espacio, por ejemplo el eje coordenado Z, obtendremos el "**perfil**" de la onda que podrá tener una forma geométrica cualquiera. En general, la función de onda dependerá de las variables de tiempo y espacio. En una dimensión se puede escribir:

$$\xi = f(z, t) \quad [1]$$

En general la función de la onda dependerá de las variables de tiempo y espacio y, en una dimensión se puede escribir

$$\xi = f(\mathbf{z}, t) \quad [1]$$

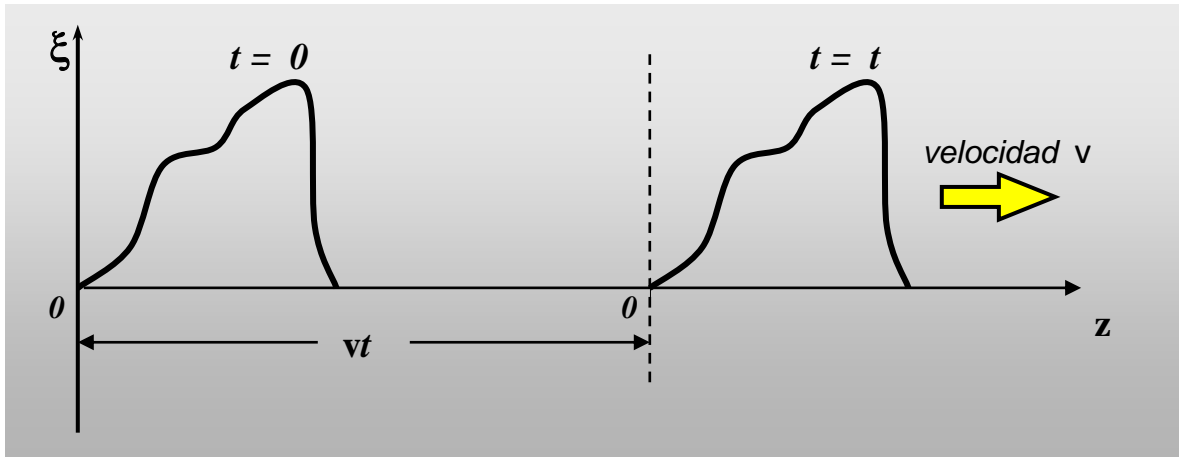


Figura N° 2: Pulso viajero

En la figura N° 2 tenemos una doble representación temporal (para $t = 0$ y $t = t$) de una onda no oscilante conocida como “**pulso**” viajero, el cual generalmente **se produce cuando la perturbación aparece y desaparece de manera brusca y repentina**. En este caso, la onda viaja en la dirección **Z** con forma constante y con velocidad “ v ”, conocida como “**velocidad de fase**”, de modo que, al transcurrir un tiempo t , el pulso se habrá desplazado del origen una distancia $v.t$.

La expresión más simple de una onda, de una cantidad variable ξ , que viaja a la derecha en la dirección Z con velocidad constante v es:

$$\xi = f(z - v t) \quad [2]$$

Si queremos verificar la variación de ξ , luego de un aumento Δt en el tiempo y considerando el incremento de $v\Delta t$ en la coordenada z , tendremos:

$$\begin{aligned} f[(z + v \Delta t) - v(t + \Delta t)] &= \\ f[(z + v \Delta t) - vt - v \Delta t] &= f(z - v t) \end{aligned}$$

que es precisamente la ecuación [2], de modo que, **el perfil permanece inalterado**.

Si la onda se desplazara en sentido contrario, en este caso a la izquierda, será suficiente invertir el signo de la velocidad en la función de onda, resultando:

$$\xi = f(z + v t) \quad [3]$$

Concluimos entonces que una expresión matemática de la forma:

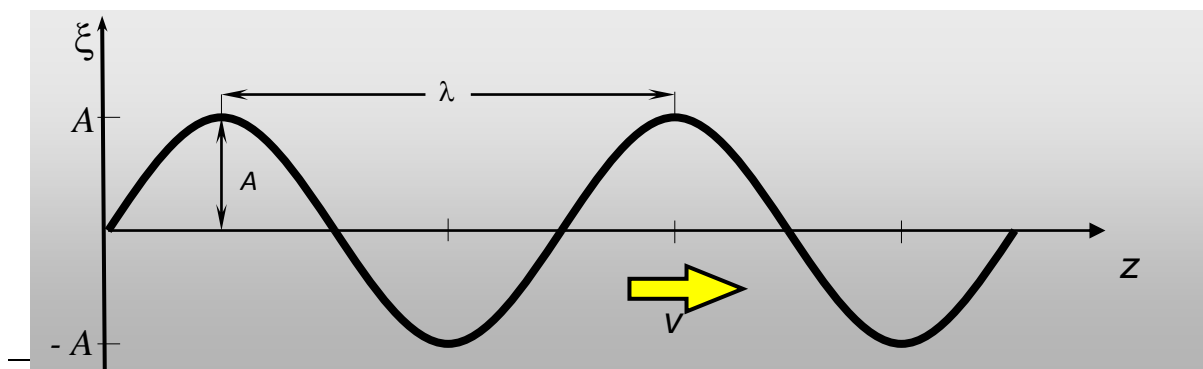
$$\xi(z, t) = f(z \mp v t) \quad [4]$$

que llamaremos “**función de onda**” unidimensional, es adecuada para describir una situación física que “viaja” o “se propaga” sin deformación en la dirección del eje **Z**.

La cantidad $\xi(z, t)$ **puede representar muy diversas cantidades físicas**, tales como la deformación en un sólido, la presión de un gas, la temperatura de un cuerpo, un campo eléctrico o magnético, e incluso una onda cuántica*.

ELEMENTOS DE UNA ONDA:

Si llamamos “**A**” a la **amplitud de la onda**, “ ω ” a la **frecuencia angular** (es decir, 2π veces la **frecuencia** “**f**” ó “**v**” en ciclos por unidad de tiempo), “**T**” al **período** (unidades de tiempo por onda), “ λ ” a la **longitud de onda**, que es la distancia de una cresta a la siguiente o, más precisamente, la distancia en la dirección de propagación entre dos puntos con el mismo valor de la función de onda, “**k**” al **número de propagación** (definido como $|k \lambda| = 2\pi$), $v = f \lambda$ a la **velocidad de fase o propagación**, $\chi = 1/\lambda$ al **número de onda** y “ δ ” la **fase inicial o edad del ángulo** (la cual se origina en el generador de la onda y es independiente de qué tan distante en el espacio y qué tan lejos en el tiempo ha viajado la onda).



* Respecto a las llamadas “Ondas de De Broglie”, se recomienda la lectura del Capítulo 6 en “*Naturaleza ondulatoria de las partículas*” (Young, Huhg, 1971: 152-163).

Figura N° 3: Representación de un tren de ondas

Podemos describir la perturbación de la figura N° 3 que se propaga en la dirección positiva del eje **Z** en el lenguaje de la geometría analítica de muchas formas equivalentes:

$$\xi = A \operatorname{sen} k(z \mp vt + \delta) \quad [5]$$

$$\xi = A \operatorname{sen}(kz \mp \omega t + \delta) \quad [8]$$

$$\xi = A \operatorname{sen} 2\pi \left(\frac{z}{\lambda} \mp \frac{t}{T} + \delta \right) \quad [6]$$

$$\xi = A \operatorname{sen} 2\pi f \left(\frac{z}{v} \mp t + \delta \right) \quad [9]$$

$$\xi = A \operatorname{sen} 2\pi (\chi z \mp ft + \delta) \quad [7]$$

$$\xi = A \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi z}{\lambda} \mp \frac{t}{T} + \delta \right) \quad [10]$$

Alternativamente podemos utilizar una representación compleja de la onda; por ejemplo:

$$\xi = A e^{i(\omega t - kz + \delta)} = A e^{i\phi} \quad [11]$$

Y luego, tomar como solución sólo **la parte real** de la función compleja:

$$\xi = A \cos(kz - \omega t + \delta) \quad [12]$$

TABLA Nº 1
PARAMETROS DE LAS ONDAS

Nombre	Símbolo	Dimensión	A	ϕ	T	λ	f	ω	v	k	χ
Amplitud	A	Igual a la cantidad física que represente	A	-	-	-	-	-	-	-	-
Fase	ϕ	Adimensional	-	ϕ	-	-	-	-	-	-	-
Período	T	Tiempo	-	-	T	λ/v	$1/f$	$2\pi/\omega$	λ/v	$2\pi/(k v)$	$1/(v\chi)$
Longitud de Onda	λ	Espacio	-	-	$v T$	λ	v/f	$2\pi v / \omega$	v/f	$2\pi/k$	$1/k$
Frecuencia	f	Tiempo ⁻¹	-	-	$1/T$	v/λ	f	$\omega/2\pi$	v/λ	$k v/2\pi$	$v\chi$
Frecuencia angular	ω	Tiempo ⁻¹	-	-	$2\pi/T$	$2\pi v/\lambda$	$2\pi f$	ω	$k v$	$k v$	$2\pi v\chi$
Velocidad de Onda	v	Espacio x Tiempo ⁻¹	-	-	λ/T	λf	λf	ω/k	v	ω/k	f/χ
Número de Propagación	k	Espacio ⁻¹	-	-	$2\pi/(v T)$	$2\pi/\lambda$	$2\pi f/v$	ω/v	ω/v	k	$2\pi\chi$
Número de onda	χ	Espacio ⁻¹	-	-	$1/(v T)$	$1/\lambda$	f/v	$\omega/2\pi v$	$\omega/2\pi v$	$k/2\pi$	χ

ECUACION DE ONDA:

En cualquier instante la variación de ξ respecto a Z , que representa la pendiente de la gráfica, viene dada por:

$$\frac{\partial \xi}{\partial Z} = f'(z-vt) \quad [13]$$

La segunda derivada de ξ respecto a z , que representa la curvatura del perfil se denota por:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial Z^2} = f''(z-vt) \quad [14]$$

Por otra parte, en cualquier lugar, la cantidad ξ cambia con el tiempo según:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -v f'(z-vt) \quad [15]$$

Y la segunda diferencial con respecto al tiempo, es decir la aceleración de ξ , está dada por:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 f''(z-vt) \quad [16]$$

Combinando los resultados de las ecuaciones [14] y [16], toda onda que se propague con velocidad de fase constante en la dirección de un eje coordenado, en este caso Z , y sin modificación de su perfil, está regida por la ecuación:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial Z^2} \quad [17] \quad \begin{array}{l} \text{Ecuación de} \\ \text{Onda} \\ \text{Unidimensional} \end{array}$$

En consecuencia, si un sistema físico queda definido por una ecuación como la [17], entonces soportará ondas que se propagarán sin cambio en la forma.²

² Se recomienda la lectura de "Óptica" (GRAHAM y THOMPSON, 1979: 23)

Para ondas que se desplazan en diversas direcciones del espacio, es necesario generalizar la ecuación [17] para aplicarla a un movimiento ondulatorio tridimensional:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad [18]$$

La cual representa la ecuación de onda tridimensional en el sistema de coordenadas rectangulares, pero, siendo más generales podemos usar la siguiente expresión que cubre cualquier formulación de coordenadas espaciales, planas o unidimensionales.

$$\nabla^2 \xi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad [19]$$

El operador ∇^2 , conocido como "**laplaciano**", toma una forma distinta en cada sistema coordenado y nos permite describir matemáticamente el comportamiento de una onda tridimensional de acuerdo a su forma, de la manera más conveniente y sencilla.³

³ Para conocer sobre las formas que toma el **laplaciano** en diversos sistemas de coordenadas revisar: "**Óptica**" (**HETCH y ZAJAC**, 1994: 35-36) o "**Óptica**" (**GRAHAM y THOMPSON**, 1979: 31-32)

CAPITULO 3

CLASES DE ONDAS

INTRODUCCION:

Existen múltiples formas de clasificación de las ondas, tomando en cuenta propiedades muy diferentes. Algunas de ellas son más útiles que otras, pero, en todo caso, no son excluyentes, por lo que vale la pena hacer mención a la mayoría de ellas.

Sin embargo, en el desarrollo del resto de los apuntes se hará énfasis sobre algunas clases en particular, asumiendo que los resultados de su tratamiento se pueden generalizar, a menos que se diga lo contrario.

No incluiremos, sin embargo, las clases de ondas particulares que, por ejemplo, observamos a nuestro alrededor, tales como las ondas sobre el agua, las olas, las ondas de arena, etc.⁴. Igualmente, no haremos mayores referencias a algunas clases especiales de ondas tales como las ondas de De Broglie (ya citadas) o las “*ondas guiadas*” que se producen cuando hay una discontinuidad en el medio en el que se está propagando una onda, apareciendo una tendencia en ella de seguir la superficie de discontinuidad, lo cual es aprovechado para múltiples aplicaciones tecnológicas, tales como las “*líneas de transmisión*” de microondas en las telecomunicaciones⁵.

La tabla N° 2, que a continuación se presenta, contiene la información condensada sobre los diversos tipos de onda, clasificadas de acuerdo a distintas propiedades o características. Más adelante se presenta información detallada sobre las características de cada uno de los tipos de movimiento ondulatorio clasificados según ciertas propiedades y características.

⁴ Al respecto se recomienda el extenso y excelente trabajo “*Ondas a Nuestro Alrededor*” (KÁDOMTSEV Y RYDNIK, 1984: 4-174)

⁵ Para ampliar la información revisar el capítulo “*Ondas guiadas y líneas de transmisión*” (WALDRON, R. A., 1968: 94-129)

TABLA N° 2

CLASES DE ONDAS CONSIDERANDO DIVERSAS PROPIEDADES

PROPIEDAD		NOMBRE	EJEMPLOS
Características del medio	Medio material	• Ondas mecánicas	<ul style="list-style-type: none"> • Ondas sonoras • Ondas en agua • Ondas en una cuerda vibrante
	Vacío	<ul style="list-style-type: none"> • Ondas electromagnéticas • Ondas gravitacionales 	<ul style="list-style-type: none"> • Ondas de radio • Microondas • Ondas térmicas • Luz • Ondas de alta frecuencia
Movimiento relativo de las partículas del medio respecto a la dirección de propagación	Dirección perpendicular	• Ondas transversales	<ul style="list-style-type: none"> • Ondas en una cuerda vibrante • Ondas en agua • Ondas electromagnéticas
	Dirección paralela	• Ondas longitudinales	<ul style="list-style-type: none"> • Ondas sonoras • Ondas comprensivas en un resorte
Número de dimensiones espaciales mínimas para representarla	Una dimensión	• Ondas unidimensionales	<ul style="list-style-type: none"> • Ondas en una cuerda vibrante • Ondas comprensivas en un resorte
	Dos dimensiones	• Ondas bidimensionales	<ul style="list-style-type: none"> • Ondas de tensión superficial
	Tres dimensiones	• Ondas tridimensionales	<ul style="list-style-type: none"> • Ondas planas • Ondas esféricas • Ondas cilíndricas
Perfil de la onda	Senoide o cosenoide	• Ondas armónicas	<ul style="list-style-type: none"> • Ondas senoidales • Ondas cosenoidales
	Cualquier otra forma de perfil	• Ondas anarmónicas	<ul style="list-style-type: none"> • Ondas cuadradas • Ondas amortiguadas • Ondas diente de sierra
Cantidad física	Cantidad escalar	• Ondas escalares	<ul style="list-style-type: none"> • Ondas de presión • Ondas de temperatura
	Cantidad vectorial	• Ondas vectoriales	<ul style="list-style-type: none"> • Ondas eléctricas • Ondas magnéticas
Movimiento del perfil	Con movimiento	• Ondas viajeras	<ul style="list-style-type: none"> • La luz proveniente de las estrellas.
	Sin movimiento	• Ondas estacionarias	<ul style="list-style-type: none"> • Ondas estacionarias por reflexión.

SEGÚN LAS CARACTERÍSTICAS DEL MEDIO:

- **ONDAS MECANICAS:**

Requieren de un medio material para propagarse, tal es el caso de las ondas en el agua, las ondas en una cuerda o resorte, las ondas sonoras en cualquier medio material (generalmente en el aire), las ondas sísmicas en la corteza terrestre, etc. La figura N° 4 muestra e ejemplo de una onda viajera producida por la perturbación repentina del extremo libre de una cuerda que se encuentra empotrada o restringida en el otro extremo. En este caso, la onda no podría propagarse de no existir la cuerda, es decir el medio material.

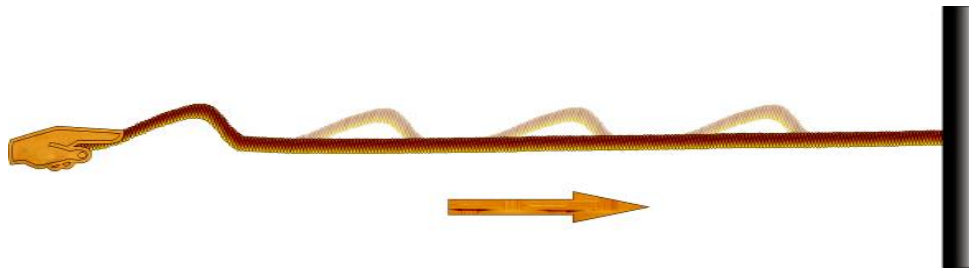


Figura N° 4: Pulso propagándose en una cuerda

- **ONDAS ELECTROMAGNETICAS:**

No necesitan de ningún medio material para propagarse, es decir, se pueden propagar el vacío, aunque el concepto de medio persiste por el requerimiento de un **campo electromagnético** en el espacio que al ser perturbado se propaga, como muestra la figura N° 5. Aquí entran todas las clases de ondas de espectro electromagnético (que veremos más adelante), pero, mencionemos la luz visible, las ondas de radio, la radiación térmica, las microondas, la radiación ultravioleta, los rayos X y gamma.⁶

⁶ Es conveniente advertir que esta clasificación excluye las teorías más recientes sobre la existencia de otras clases de ondas que sin requerir medio material alguno, existirían en el Universo, aun cuando, su origen no está relacionado con las ondas electromagnéticas, tales como las **ondas gravitacionales** cuya existencia explicaría algunas teorías sobre el origen y evolución del universo.

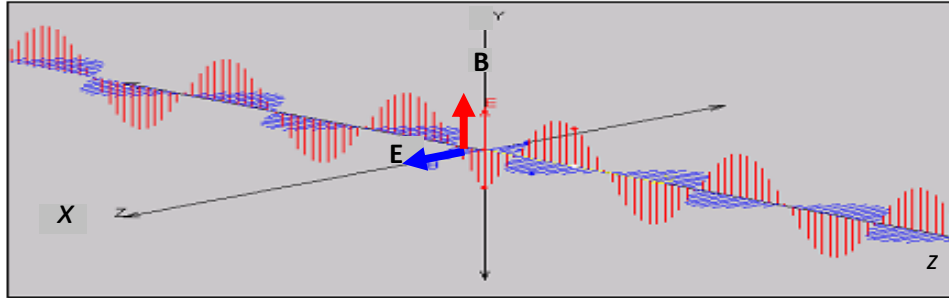


Figura N° 5: Representación de una onda electromagnética

SEGÚN EL MOVIMIENTO DEL MEDIO RESPECTO A LA DIRECCIÓN DE PROPAGACIÓN:

- **ONDAS TRANSVERSALES:**

Son aquellas en que la vibración local del medio es perpendicular a la dirección de propagación. Si se trata de un medio material como, por ejemplo, la cuerda de la figura N° 4 ó el resorte de la figura N° 6, podemos observar que las partículas que componen el medio oscilarán hacia arriba y hacia abajo de su posición de equilibrio, en dirección normal a la horizontal (dirección en que avanza la onda).

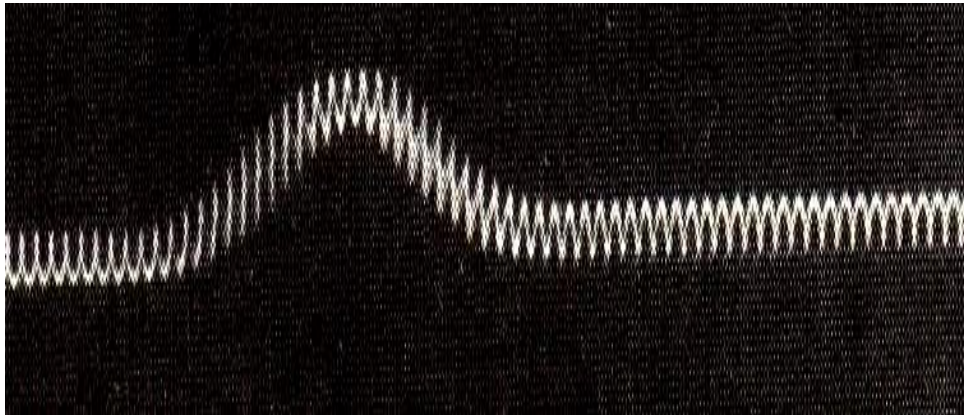


Figura N° 6: Un pulso transversal que se propaga a lo largo de un resorte.
Imagen tomada de "Las Ondas" (ESCALONA, Orlando: 2001)

Al igual que estas ondas mecánicas, las ondas electromagnéticas son transversales, pues la oscilación de los campos eléctricos y magnéticos asociados, se produce en dirección perpendicular a la dirección de propagación de la onda, como puede verse en la figura N° 5.

- **ONDAS LONGITUDINALES:**

En las ondas longitudinales la vibración de cada parte del medio es paralela a la dirección en que propaga la onda. Es el caso de las ondas sónicas a las que se propagan a lo largo de un resorte.

Si colocamos colgando un resorte, por uno de sus extremos, y aplicamos un pequeño impulso, estirándolo o comprimiéndolo, en la dirección vertical, se producirá una oscilación vertical en el resorte. Si lo hacemos con cuidado y el resorte es suficientemente largo, observaremos la propagación de la perturbación a lo largo del resorte, como se muestra en la figura N° 7; en la cual se supone que las líneas quebradas representan convenientemente las espiras del resorte.

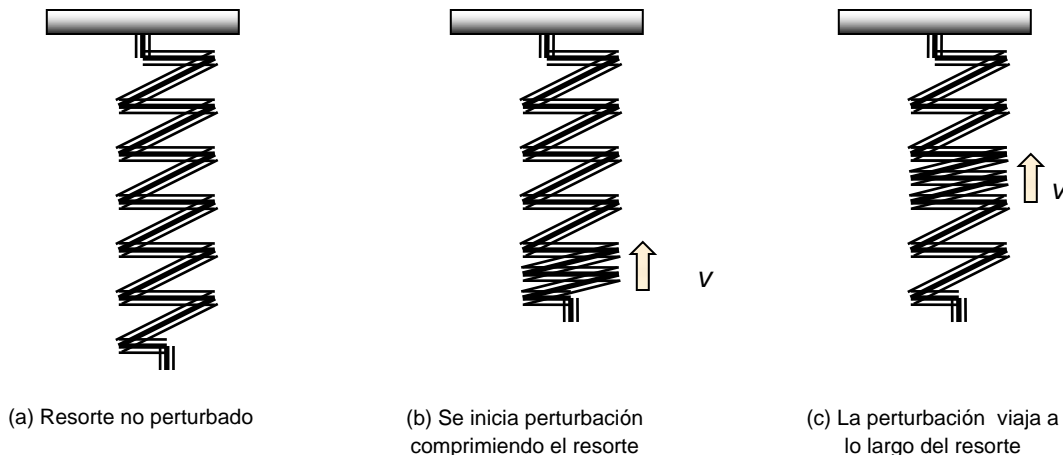


Figura N° 7: Un pulso longitudinal que se propaga a lo largo de un resorte

Al comprimir súbitamente el extremo inferior, las espiras inferiores del resorte ejercer fuerzas sobre las espiras superiores adyacentes, haciendo que se propague la compresión a lo largo del resorte en forma de pulso compresivo. Es conveniente notar que ninguna de las partes del resorte se aleja sensiblemente de la posición original de equilibrio, mientras que la onda recorre toda la longitud del resorte.

De modo muy similar se transmiten las ondas sonoras, las cuales son producto de la perturbación, en forma de cambios locales de presión, en el medio, por ejemplo en el aire. Tales cambios de presión se propagan de un sitio a otro a la velocidad del sonido (que es distinta para cada medio material) y son percibidos por nuestro sentido del oído. De hecho es increíble la capacidad de discernimiento

entre un sonido y otro como producto de la combinación de diferencias muy pequeñas en la onda de presión.

NOTA: Se pueden observar ondas cuya clasificación no es exactamente ni transversal ni longitudinal, como las llamadas ondas de torsión que, como indica su nombre, se refieren a ondas que se propagan en la dirección de un eje, alrededor del cual las partículas materiales del medio oscilan en rotación.

Sin embargo, con frecuencia las ondas pueden ser más bien una combinación de ondas transversales y longitudinales, como ocurre con las olas en el agua o cualquier otro líquido. En este caso, la trayectoria seguida por una partícula será una circunferencia o una elipse.

SEGÚN EL NÚMERO MÍNIMO DE DIMENSIONES NECESARIAS PARA REPRESENTARLA:

- **ONDAS UNIDIMENSIONALES:**

Cualquier perturbación es posible describirla en función de su propagación en el espacio. Si la onda se propaga en una sola dirección podemos considerar entonces la variación de sus características fundamentales como función de una de las coordenadas espaciales, por ejemplo, la coordenada del eje de las X , de las Y o de las Z . Si llamamos ξ a una perturbación unidimensional que se propaga según la dirección del eje X , tendremos que: $\xi = f(x)$, sin importar la naturaleza de la onda, que podría ser, tanto, el desplazamiento transversal de una cuerda o el longitudinal de las espiras del resorte, como la magnitud del campo eléctrico o magnético de una onda luminosa, e incluso la amplitud de la probabilidad cuántica de una onda de materia.

En la figura N° 8 se pone como ejemplo una onda longitudinal que se propaga a lo largo de un metal si uno de sus extremos se golpea regularmente con un martillo.

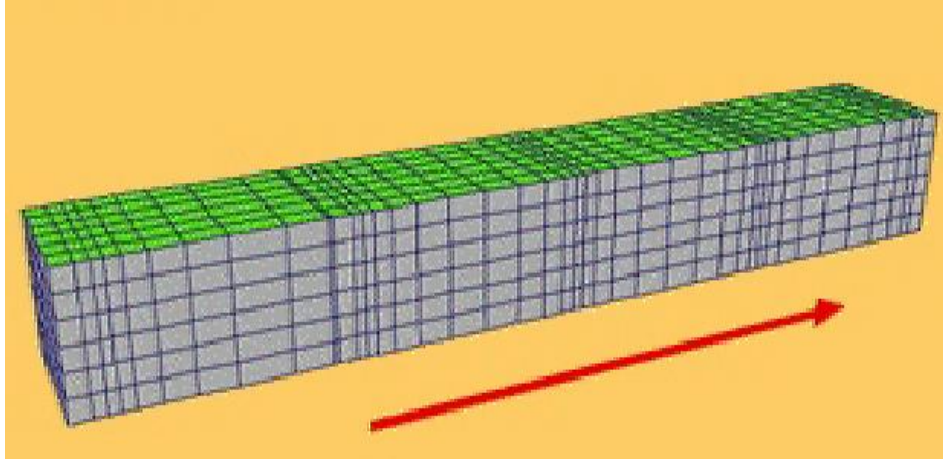


Figura N° 8: *Un ejemplo de onda unidimensional se propaga a lo largo de un metal golpeado longitudinalmente en uno de sus extremos.*

- **ONDAS BIDIMENSIONALES:**

La propagación de una onda circular ocurre simultáneamente en todas las direcciones radiales posibles y, si bien es cierto, en ausencia de obstáculos podríamos describir convenientemente la perturbación en cualquiera de dichas direcciones, pues son equivalentes, no obstante, puede resultar necesario y conveniente realizar su descripción en función de dos coordenadas espaciales, tales como las coordenadas rectangulares $\xi = f(x, y)$ o las coordenadas polares $\xi = f(r, \theta)$. Igualmente, la solución de la perturbación de ondas elásticas producidas en una membrana tensa, requiere la descripción de ondas bidimensionales como se ve en la figura N° 9.

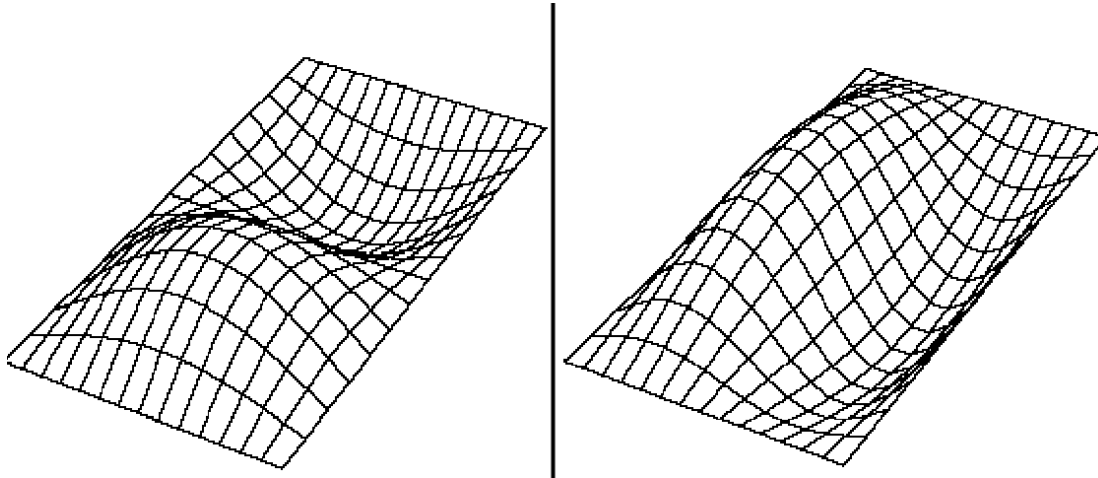


Figura N° 9: Ondas superficiales en una membrana tensa

- **ONDAS TRIDIMENSIONALES:**

Existen muchas perturbaciones de este tipo, que requieren un estudio tridimensional del fenómeno como veremos más adelante la luz es una de ellas y dependiendo de las características específicas del problema resultará conveniente utilizar una representación particular de las diversas coordenadas espaciales. A partir de ello encontraremos otra sub.-clasificación.

- **ONDAS PLANAS:**

Cuando en determinado instante las superficies, sobre las cuales una perturbación es constante, forman un conjunto de planos paralelos, generalmente perpendiculares a la dirección de propagación tendremos ondas planas (ver figura N° 10). Luego deduciremos las ecuaciones que describen esta clase de perturbación a partir de las componentes en coordenadas cartesianas $\mathbf{r} \equiv [x, y, z]$.

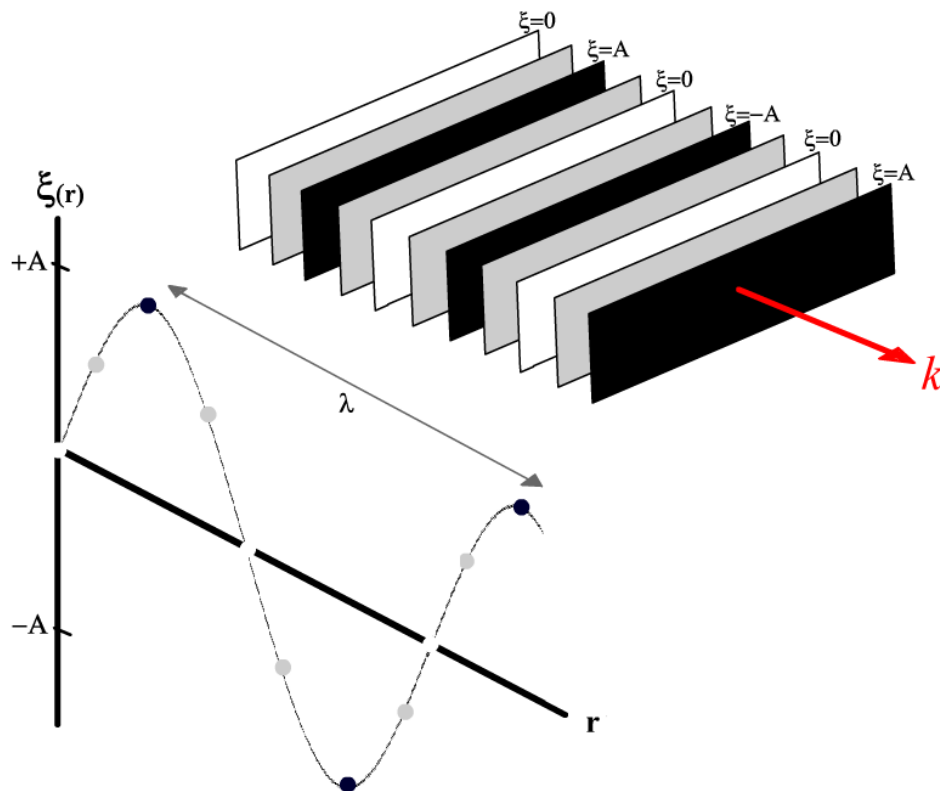


Figura N° 10: Frentes de onda para una onda plana armónica

○ ONDAS ESFÉRICAS:

Si los frentes de ondas tienen forma de esferas concéntricas con radio creciente cuando se propagan en el espacio (ver figura N° 11) resulta más conveniente las coordenadas esféricas $\mathbf{r} \equiv [r, \theta, \phi]$.

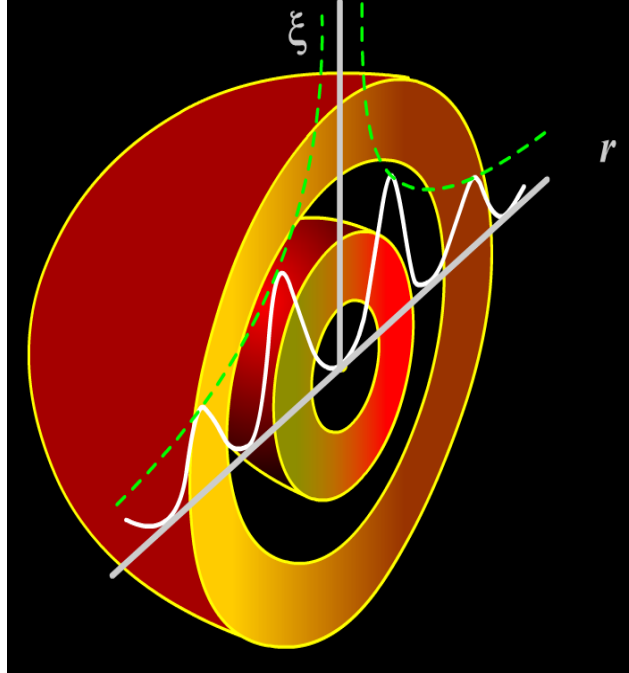


Figura N° 11: Frentes de onda para una onda esférica anarmónica

○ **ONDAS CILÍNDRICAS:**

Cuando los frentes de ondas tienen la forma de cilindros concéntricos se usan las coordenadas cilíndricas para su descripción matemática: $r \equiv [r, \theta, z]$. En la figura N° 12 se aprecia la formación de ondas cilíndricas en una ranura sobre la que inciden ondas planas, los frentes de onda se curvan al pasar por la ranura. Otro caso interesante, de generación de ondas cilíndricas, es un filamento luminoso largo emisor de ondas electromagnéticas que a distancias cortas del filamento tendrán justamente esta forma.

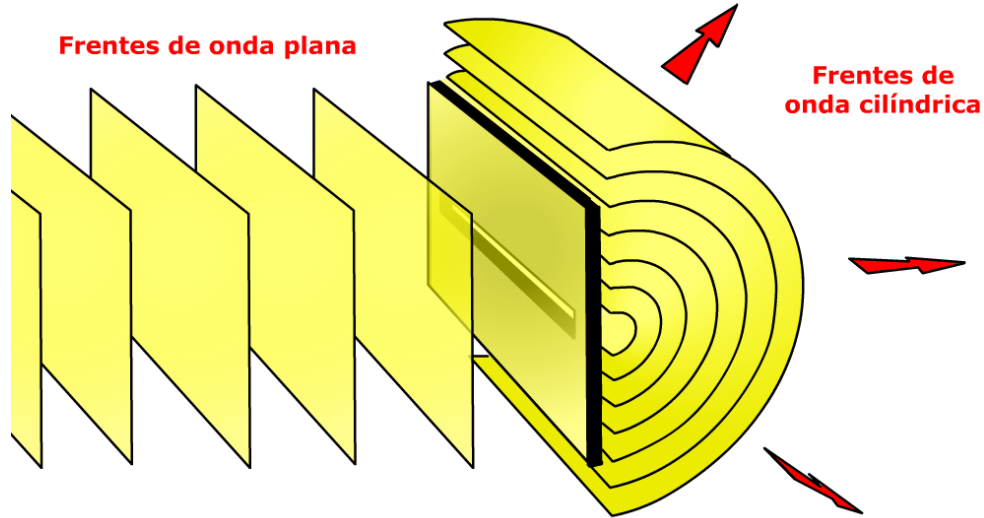


Figura N° 12: Frentes de onda para una onda cilíndrica

SEGÚN LA FORMA O PERFIL DE LA ONDA:

- **ONDAS ARMONICAS:**

Es aquella cuya representación gráfica de la magnitud o amplitud, en función de la coordenada espacial, conocida como perfil de la onda, es una curva senoidal o cosenoidal, como se ve en la figura N° 13.

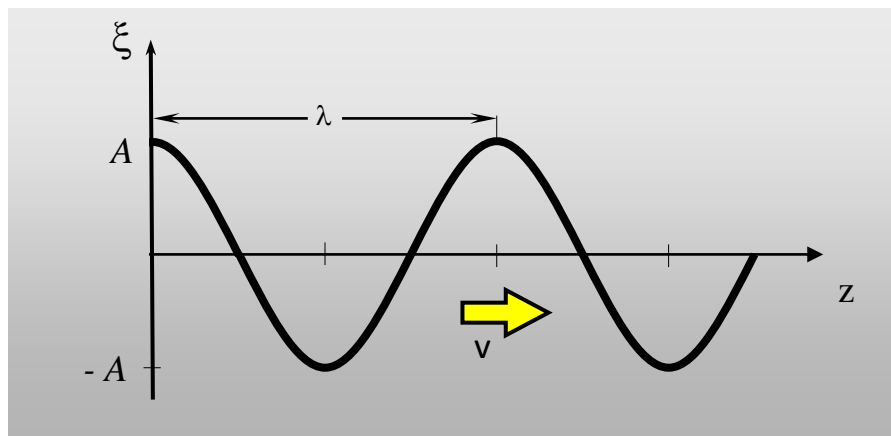


Figura N° 13: Perfil de una onda armónica cosenoidal

Las siguientes expresiones matemáticas representan funciones de onda armónicas aunque, por supuesto, no son las únicas y se pueden obtener otras completamente equivalentes, sustituyendo la función coseno por el seno, que corresponden a las ecuaciones [5] a la [10].

$$\xi = A \cos k(z \mp vt) \quad [20]$$

$$\xi = A \cos(kz \mp \omega t) \quad [23]$$

$$\xi = A \cos 2\pi \left(\frac{z}{\lambda} \mp \frac{t}{T} \right) \quad [21]$$

$$\xi = A \cos 2\pi f \left(\frac{z}{v} \mp t \right) \quad [24]$$

$$\xi = A \cos 2\pi (\chi z \mp ft) \quad [22]$$

$$\xi = A \cos \left(\frac{2\pi z}{\lambda} \mp \frac{2\pi t}{T} \right) \quad [25]$$

- **ONDAS ANARMONICAS:**

Son todas aquellas cuyos perfiles no son curvas armónicas (senos o cosenos), sin importar si permanecen constantes o no al transcurrir el tiempo. En la figura N° 14 se observan varios ejemplos:

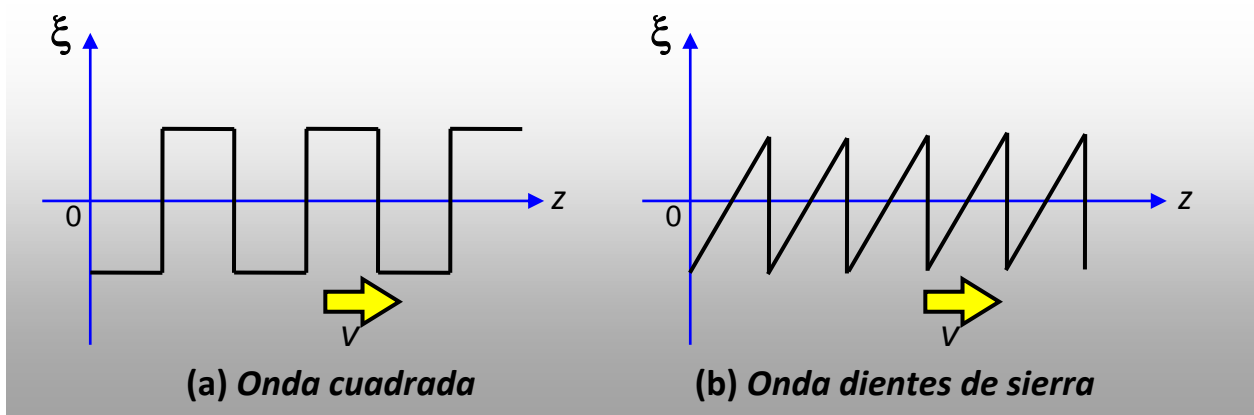


Figura N° 14: Perfiles de ondas anarmónicas

SEGÚN LA CANTIDAD FÍSICA QUE REPRESENTA:

- **ONDAS ESCALARES:**

Corresponden a la representación, como un movimiento ondulatorio, de cantidades físicas como la temperatura y la presión, que quedan completamente especificadas por su magnitud, es decir, se puede tratar como cantidades escalares.

- **ONDAS VECTORIALES:**

Cuando es necesario especificar alguna dirección, aparte de la magnitud, tal como ocurre en un campo eléctrico o magnético, la onda debe representar las características vectoriales de la cantidad física. La dirección del vector puede estar fija o puede variar con el tiempo girando alrededor de la dirección de propagación de manera uniforme o al azar.

Un buen ejemplo de ondas vectoriales son las ondas linealmente polarizadas, figura N° 15, que se propagan sobre un plano que forma cierto ángulo con los ejes coordenados.

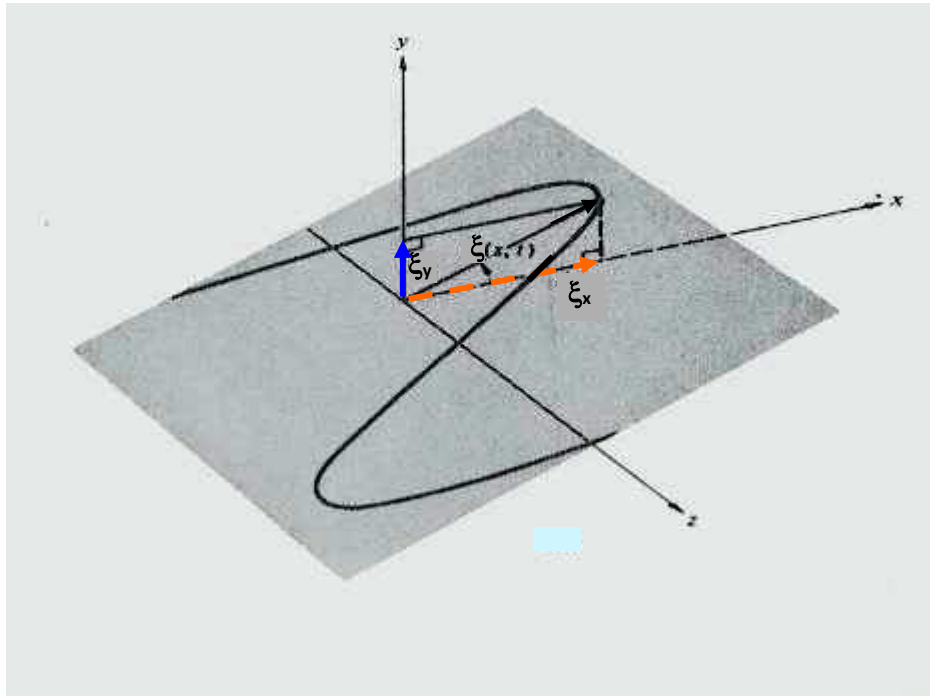


Figura N° 15: Onda polarizada linealmente

SEGÚN EL MOVIMIENTO DE SU PERFIL:

- **ONDAS VIAJERAS:**

Cuyo perfil se mueve en el espacio, por lo cual su magnitud dependerá del tiempo, como se muestra en la figura N° 16.

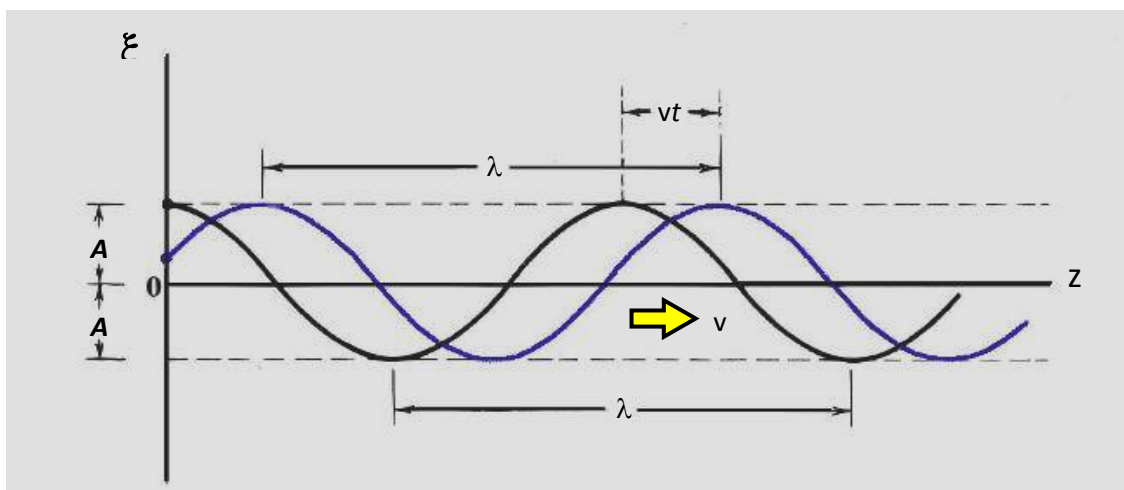


Figura N° 16: Onda viajera

- **ONDAS ESTACIONARIAS:**

Su perfil aparentemente no se mueve en la dirección de propagación sino que permanece fijo o constante en cualquier instante, como se ilustra en las fotografías de la figura N° 17. Surgen por la superposición de dos ondas con ciertas características particulares que más adelante analizaremos.

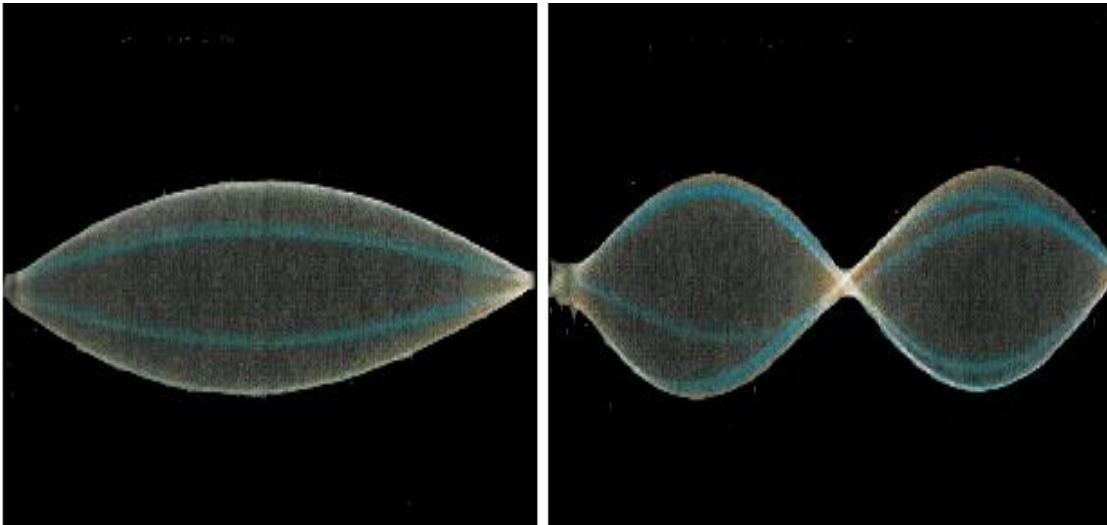


Figura N° 17: Ondas estacionarias en una cuerda vibrante.

CAPITULO 4

PROPAGACIÓN DE ONDAS

INTRODUCCION:

Independientemente de la clase de onda que estemos estudiando y del medio de propagación, resulta interesante descubrir que todas ellas tienen propiedades comunes que se hacen evidentes al propagarse en el espacio pasando de un medio a otro con características diferentes.

Tales diferencias serán decisivas sobre todo en los cambios de velocidad y dirección que sufre la perturbación ondulatoria en la interface, de modo que, de acuerdo a la característica del medio de propagación un cambio en algunas de sus propiedades traerá como consecuencia que el movimiento ondulatorio, siguiendo leyes deducibles de principios físicos generales, como los de Huygens o Fermat, cambie irremediabilmente.

Son cinco los fenómenos ondulatorios básicos: reflexión, refracción o transmisión, interferencia, difracción y polarización.

REFLEXION Y TRANSMISIÓN DE ONDAS EN UNA CUERDA:

Cuando una perturbación ondulatoria se encuentra en su camino un obstáculo, o llega al límite del medio material en que se propaga, por lo menos una parte de ella es reflejada. Este fenómeno es característico de todas las clases de onda, como por ejemplo; la reflexión de la luz en un espejo, con lo cual podemos ver nuestra imagen, o el eco de las ondas sonoras en un sitio cerrado o en un acantilado.

Por supuesto también aparece de modo más apreciable cuando un pulso se propaga en una cuerda tensada y rebota en los extremos restringidos, como se ilustra en la figura N° 18.

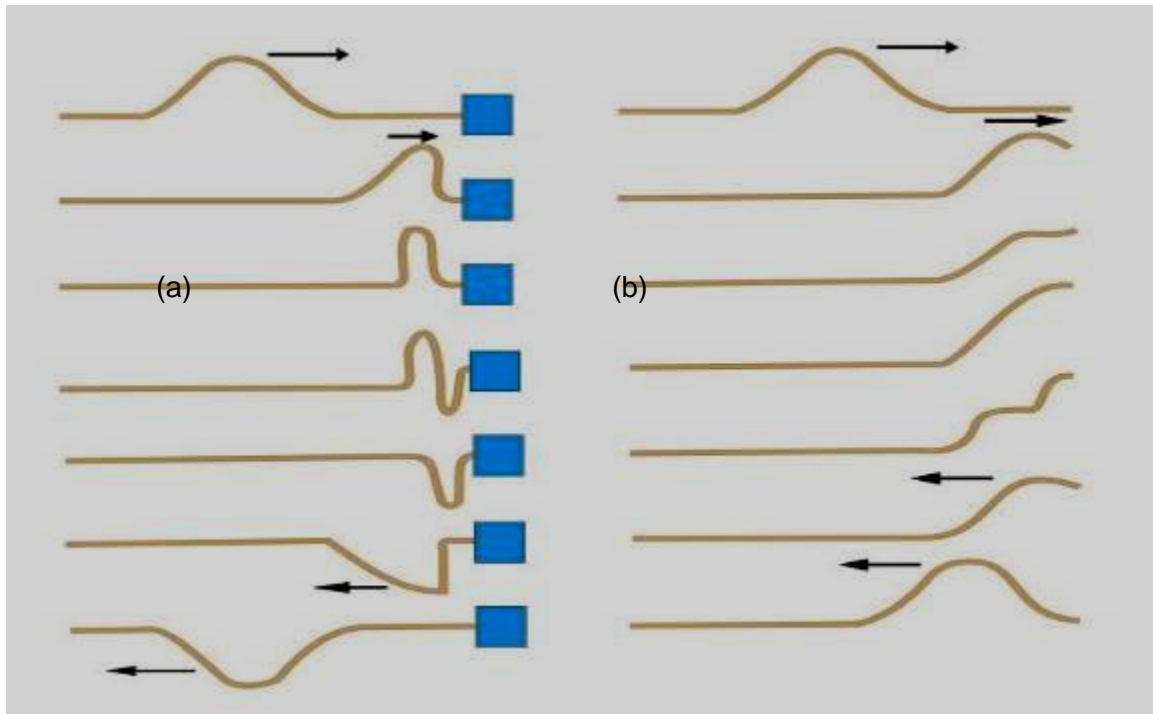


Figura N° 18: Reflexión de una onda en una cuerda tensa:(a) cuando el extremo está fijo y (b) cuando está libre

Obsérvese que **el pulso reflejado en el extremo fijo** cambia no sólo de dirección sino que **se refleja invertido**, pero si por el contrario la cuerda está libre en el extremo el pulso regresa con la cresta hacia arriba, tal cual llegó.

La explicación es muy simple a partir de las leyes de Newton, tomando en cuenta que el pulso al llegar al extremo empotrado ejerce una fuerza hacia arriba sobre el soporte, el cual a su vez ejerce otra igual, pero de sentido contrario, sobre la cuerda, produciendo el pulso reflejado invertido.

En el segundo caso, no hay soporte, y el extremo libre se desplaza verticalmente hacia arriba un poco más que la amplitud del pulso, ejerciendo con ello un “latigazo” o “tirón” hacia arriba en la cuerda, por lo cual, reaparece el pulso en sentido contrario pero sin invertirse.

En realidad, el pulso reflejado debe tener menos amplitud, debido a la pérdida de energía en la interacción con el soporte, de hecho parte de la energía original se convierte en energía térmica y parte de ella se transmite al soporte.

Si un pulso se desplazara en una cuerda formada por dos trozos de diferente diámetro (o masa), aparecerán dos pulsos; uno reflejado propagándose en sentido contrario a la onda incidente e invertido en el trozo más delgado y otro en el mismo sentido y derecho en el trozo más grueso, esto se ilustra apropiadamente en la figura N° 19. Puede resultar interesante probar estos resultados haciendo el experimento con una cuerda o un resorte largo y flexible.

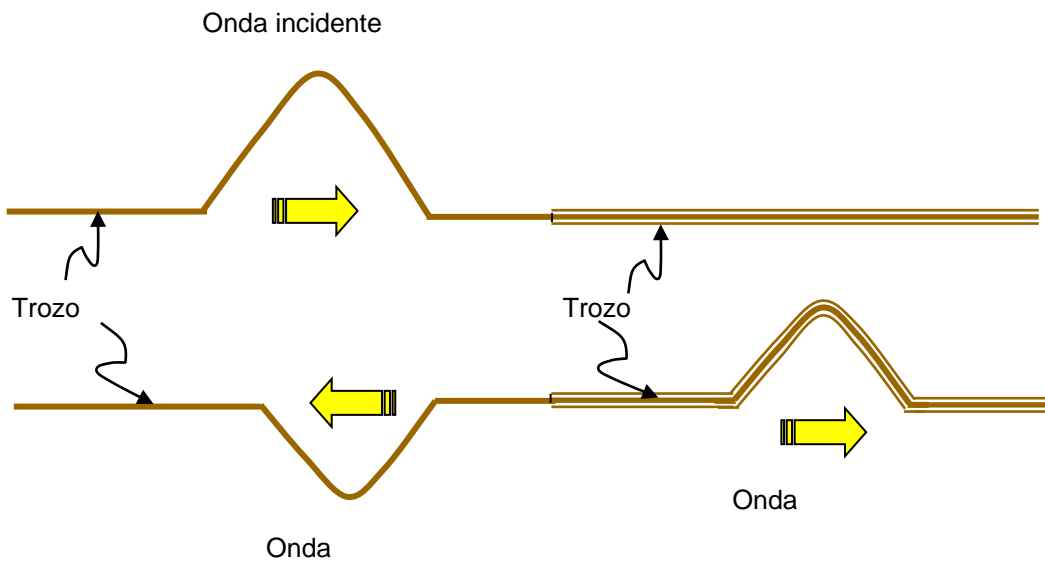


Figura N° 19: Reflexión y transmisión de una onda en una discontinuidad

REFLEXION Y REFRACCIÓN DE ONDAS PLANAS:

Para el caso de ondas tridimensionales y bidimensionales, se debe definir el llamado “**frente de onda**” el cual es una cresta de onda en toda su extensión, como por ejemplo, una ola de mar, mientras que una línea perpendicular al frente de onda trazada en la dirección de propagación se llama “**rayo**”. Estos conceptos serán de mucha utilidad para estudiar más adelante la propagación de las ondas luminosas, pero, igualmente se aplican a cualquier clase de onda.

Es interesante observar que cuando los frentes de onda están lo suficientemente lejos de la “**fente**” de la perturbación, independientemente de la forma que tenga el

frente de onda original (esférico, cilíndrico, etc.), comienzan a perder curvatura y se convierten prácticamente en un frente de **onda plana**.

La reflexión de este tipo de frentes de onda plana sigue una ley muy sencilla, conocida como la “**ley de reflexión**” que establece que *el ángulo que forma la onda incidente con la superficie reflectante es igual al ángulo que forma con ella la onda reflejada*.

Sin embargo, es más común expresarla en términos de los rayos incidente y reflejado, como muestra la figura N° 20, señalando que “**el ángulo de reflexión es igual al ángulo de incidencia**”, siendo estos, respectivamente, el ángulo que forma el rayo reflejado y el ángulo que forma el rayo incidente, con la perpendicular a la superficie reflectora.

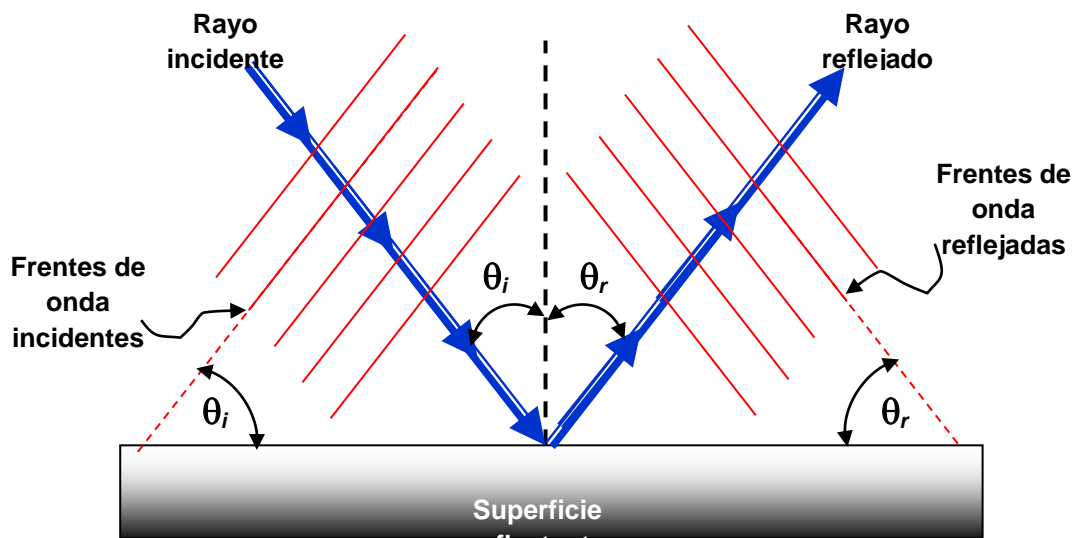


Figura N° 20: Ley de Reflexión, $\theta_i = \theta_r$.

Es este caso, también se pierde energía por lo que, a menos que se trate de una superficie reflectante ideal, la onda reflejada será menos “intensa” o de menor energía que la onda incidente.⁷

⁷ Sobre los fenómenos de refracción y difracción de ondas en general, que no tratamos en estos apuntes, recomendamos la lectura de “Física. Principios con Aplicaciones” (GIANCOLI, D., 1997: 323-325)

La refracción de las ondas, como en la transmisión, implica un cambio de velocidad de fase por lo cual, dado que la frecuencia permanece inalterada, se modificará naturalmente la longitud de onda.

DIFRACCIÓN DE ONDAS CIRCULARES

La difracción es la desviación que sufren las ondas alrededor de los bordes y esquinas que se produce cuando una porción de un frente de ondas se ve cortado o interrumpido por una barrera u obstáculo. El esquema de la onda resultante puede calcularse considerando cada punto del frente de onda original como una fuente puntual de acuerdo con el principio de Huygens y calculando el diagrama de interferencia que resulta de todas estas fuentes.

Consideremos una rendija rectangular estrecha, de anchura b , y larga, de modo que podamos ignorar los efectos de los bordes, sobre la que inciden ondas normales al plano de la rendija de longitud de onda λ . De acuerdo con el principio de Huygens, cuando la onda incide sobre la rendija todos los puntos de su plano se convierten en fuentes de ondas secundarias emitiendo nuevas ondas que en este caso reciben el nombre de ondas difractadas. Observando las ondas difractadas a diferentes ángulos θ respecto a la dirección de incidencia, en la figura siguiente, encontramos que para ciertas direcciones su intensidad es nula.

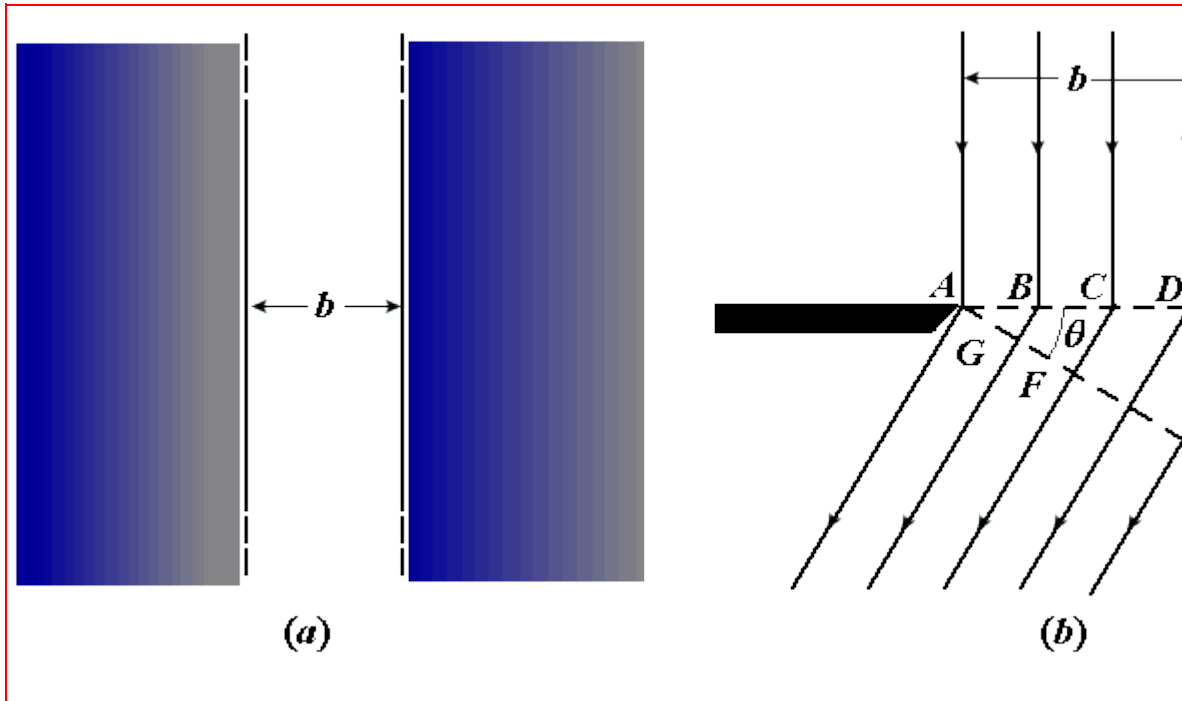


Figura Nº 21: Difracción en una rendija

Estas direcciones de intensidad nula están dadas por la relación:

$$b \operatorname{sen} \theta = n \lambda \quad [20]$$

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{n \lambda}{b} \quad n \neq 0 \quad [21]$$

Esta es la fórmula que describe el fenómeno de la difracción Fraunhofer producido por una rendija estrecha. Como las intensidades son proporcionales a los cuadrados de las amplitudes

$$I = I_0 \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} \right)^2 \quad x = \frac{\pi b \operatorname{sen} \theta}{\lambda} \quad [22]$$

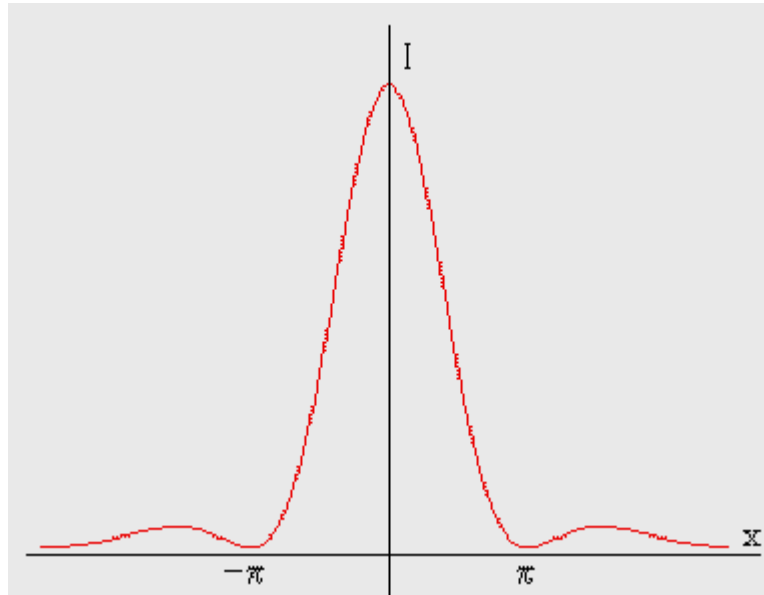


Figura N° 22: Patrón de difracción en una rendija

El máximo de la difracción se produce cuando el argumento del seno es cero, ya que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$$

Para que dicho argumento sea cero, el ángulo θ debe ser cero. Tenemos un máximo de intensidad en el origen, en la dirección perpendicular al plano de la rendija.

Los máximos y mínimos se calculan derivando la fórmula de la intensidad respecto de $x = \pi b \text{ sen } \theta / \lambda$

$$I = I_0 \left(\frac{\text{sen } x}{x} \right)^2$$

$$\frac{dI}{dx} = 2I_0 \left(\frac{\text{sen } x}{x} \right) \left(\frac{x \cos x - \text{sen } x}{x^2} \right)$$

- Cuando $\sin x / x = 0$ tenemos un mínimo de intensidad, pues $I = 0$
- Cuando $x \cos x - \sin x = 0$ o bien, cuando $x = \tan x$ tenemos un máximo de intensidad

Por ejemplo cuando $x = 0$, pero también para otros valores de x que son las raíces de la ecuación trascendente $x = \tan x$. Estas raíces se pueden calcular numéricamente o gráficamente

CAPITULO 5

INTERFERENCIA Y SUPERPOSICION DE ONDAS

INTRODUCCION:

PRINCIPIO DE SUPERPOSICION:

El principio de superposición lineal, tan útil en otros campos de la física, se aplica también para explicar los fenómenos ondulatorios cuando en una región del espacio coinciden simultáneamente varias ondas de la misma naturaleza, dando como resultado una perturbación ondulatoria combinada.

Esto significa que si un medio es perturbado simultáneamente por dos o más ondas distintas, el movimiento resultante será igual a la “suma” de los movimientos individuales que se encuentran en un punto determinado, pero solamente en ese punto.

En el resto del espacio donde las ondas no coinciden avanzarán de manera independiente, sin verse afectadas por la existencia de las otras. Esto resulta bastante obvio, porque, de lo contrario, si por ejemplo dos ondas luminosas resultaran permanentemente modificadas cada vez que se encontraran con otras,

veríamos las cosas de modos muy diferentes, pues la onda que llegaría a nosotros no se parecería en nada a las surgidas de la fuente.

Por supuesto que, en el caso de las ondas electromagnéticas, cuya existencia no implica el movimiento de ningún medio material, estaríamos hablando de la suma o resultante de las variaciones de los campos eléctricos y magnéticos en la región del espacio donde coinciden dos o más ondas de este tipo.

El fenómeno surgido de la superposición de dos o más ondas de cualquier clase se conoce como “**interferencia**”, que puede ser “**constructiva**” y “**destructiva**” de acuerdo a si la amplitud de la onda resultante sea mayor o menor, respectivamente. La figura N° 21 muestra como ejemplo de estos tipos de interferencia lo que ocurre cuando dos pulsos ondulatorios se propagan en una cuerda y se encuentran en determinado momento.

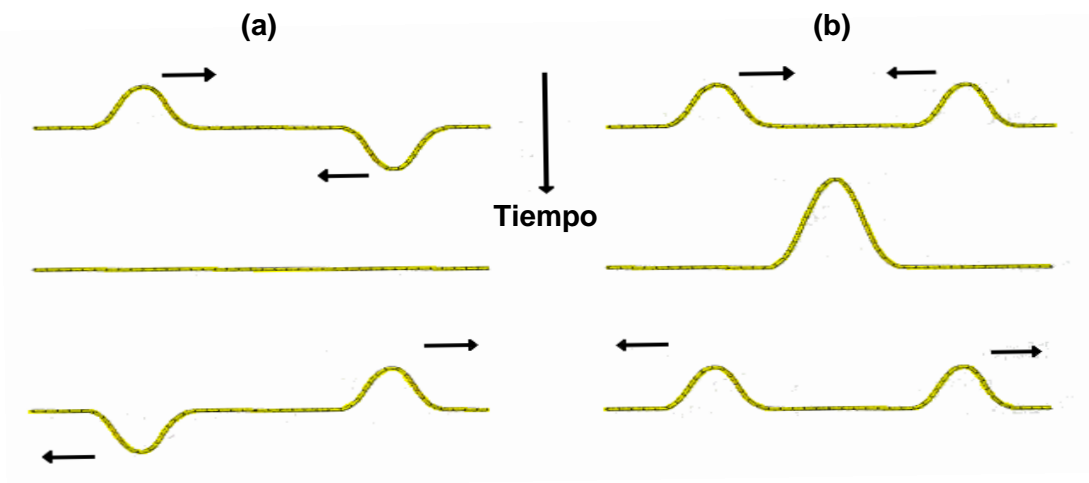


Figura N° 21: Interferencia (a) destructiva y (b) constructiva de dos pulsos que se propagan en una cuerda

La figura N° 22 muestra un ejemplo de dos pulsos ondulatorios de diferentes amplitudes y fases que se propagan en sentidos contrarios, en el cual se puede apreciar la superposición e interferencia parcial. La posición de la cuerda se muestra en varios tiempos sucesivos. Las posiciones de los pulsos individuales, durante el tiempo de superposición se indican con líneas de trazos. El desplazamiento real mostrado con una línea llena, es la amplitud de la onda resultante y corresponde a la suma algebraica de los desplazamientos

correspondientes a los pulsos separados. Después del encuentro los pulsos siguen moviéndose como si nada hubiese pasado.

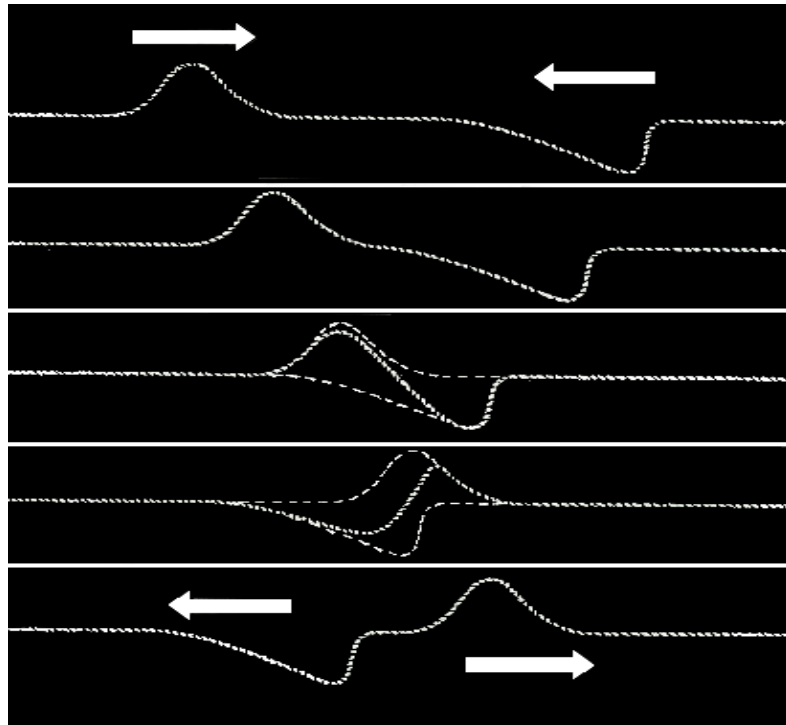


Figura N° 21: Diagrama de superposición de ondas de diferentes amplitudes y fases.

La figura N° 23 muestra una fotografía obtenida en una cubeta de ondas, en la cual se aprecia la interferencia entre ondas de agua producidas por la superposición de ondas procedentes de dos fuentes que oscilan en fase con la misma frecuencia.



Figura Nº 22: *Interferencia de ondas de agua.*

En términos de la función de onda, el principio de superposición se puede aplicar debido a las características lineales de dichas funciones, pues son función solamente de variables lineales (exponente igual a la unidad). De modo que, la función de onda resultante de sumar dos o más funciones lineales debe ser necesariamente una función lineal. Por supuesto que, las características propias de la función resultante dependerán de las propiedades de las funciones que le dan origen, es decir de sus amplitudes, fases, velocidades o frecuencias.

En general, podemos resumir el principio de superposición matemáticamente de la siguiente manera:

$$\xi(z,t) = \xi_1(z,t) + \xi_2(z,t) + \xi_3(z,t) + \dots$$

$$\xi(z,t) = \sum_{i=1}^n \xi_i(z,t) \quad [26]$$

Podemos analizar con relativa facilidad los casos de interferencia de dos **ondas armónicas** unidimensionales que se propagan en un medio en la misma dirección o en dirección contraria, pero existen métodos matemáticos más complejos para tratar los casos de **ondas anarmónicas**, tales como el análisis de

Fourier para las ondas periódicas y las integrales de Fourier para las ondas no periódicas, que no trataremos en estos apuntes⁸.

Aquí vamos a tratar algunos casos particulares en los que sólo haya que sumar dos movimientos ondulatorios armónicos, que es el caso que en la práctica se presenta con mayor frecuencia y que nos permitirá obtener conclusiones importantes.

METODO ALGEBRAICO:

Éste método permite obtener analíticamente la onda resultante de la superposición de n ondas armónicas, siempre que tengan la misma frecuencia, porque se puede demostrar que “la superposición de cualquier número de ondas armónicas coherentes (diferencias de fase constantes) que tienen la misma frecuencia y que se propagan en la misma dirección, resulta en una onda armónica de la misma frecuencia”. Partiendo de la ecuación [26]

$$\xi(z,t) = \sum_{i=1}^n \xi_i(z,t) \quad [26]$$

$$\xi(z,t) = \sum_{i=1}^n A_i \cos(\alpha_i \pm \omega t) \quad [27]$$

En la cual hemos escrito $\alpha_i = -(kz + \varphi_i)$, entonces la onda resultante será:

$$\xi(z,t) = A \cos(\alpha \pm \omega t) \quad [28]$$

donde:

$$A^2 = \sum_{i=1}^n A_i^2 + 2 \sum_{j>1}^n \sum_{i=1}^n A_i A_j \cos(\alpha_i - \alpha_j) \quad [29]$$

⁸ Recomendamos consultar un texto que profundice al respecto, tales como: “Óptica” (HETCH-ZAJAC, 1994: 218-229), “Física. Campos y Ondas” (ALONSO-FINN, 1976: 699-701), “Óptica” (GRAHAM-THOMPSON, 1979: 244-257)

y

$$\tan\alpha = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \operatorname{sen}\alpha_i}{\sum_{i=1}^n A_i \operatorname{cos}\alpha_i} \quad [30]$$

METODO COMPLEJO:

Como alternativa a las ondas armónicas escritas con senos y cosenos ya hemos dicho que se pueden usar funciones exponenciales complejas, lo cual alivia el cálculo matemático considerablemente, al superponer ondas armónicas.

Una onda armónica cualquiera se puede escribir en notación compleja como:

$$\xi_j(z,t) = A_j e^{i(\alpha_j \pm \omega t)} \quad [31]$$

donde hemos usado el contador j para no confundirlo con el operador complejo i .

La onda resultante vendrá dada por:

$$\xi(z,t) = \left[\sum_{j=1}^n A_j e^{i\alpha_j} \right] e^{\pm \omega t} \quad [32]$$

La amplitud de esta onda, llamada “**amplitud compleja**” viene dada por la cantidad:

$$A e^{i\alpha} = \left[\sum_{j=1}^n A_j e^{i\alpha_j} \right] \quad [33]$$

Esta amplitud es la suma de las amplitudes constitutivas puesto que:

$$A^2 = \left(A e^{i\alpha} \right) \left(A e^{i\alpha} \right)^* \quad [34]$$

SUMA DE FASORES:

Este es un método gráfico que utiliza la suma de vectores en el plano complejo, para encontrar el vector ondulatorio resultante. Se usa con frecuencia en ingeniería electrónica y constituyen la base de algunos esquemas usados para explicar los fenómenos de difracción, como la “*curva de vibraciones*” y la “*la espiral de Cornu*”. La amplitud compleja se conoce como **fasor** y se describe por su módulo y fase, escribiéndola así: $A \angle \alpha$.

Luego si tenemos que superponer dos o más ondas de la misma frecuencia, pero de diferente fase y amplitud, la resultante se encuentra aplicando el método del polígono, construyéndolo gráficamente y midiendo directamente la magnitud de la amplitud resultante y el ángulo de fase. Esto se entenderá mejor observando la figura N° 23, en la cual se han representado cuatro ondas o fasores diferentes, tales como:

$$A_1 = K \angle \alpha_1 \quad A_2 = 2K \angle \alpha_2 \quad A_3 = K \angle \alpha_3 \quad \text{y} \quad A_4 = 3K \angle \alpha_4$$

Donde hemos tomado como referencia para el módulo un valor cualquiera de amplitud “ K ”, a manera de ejemplo. Se trazan los vectores de modo que la punta de cada uno coincida con la cola del siguiente, teniendo cuidado de representarlos con la mayor precisión posible, tanto en módulo, usando una escala adecuada, como en dirección, usando un transportador. La amplitud compleja resultante se encuentra cerrando el polígono desde la cola del primer favor hasta la punta del último.

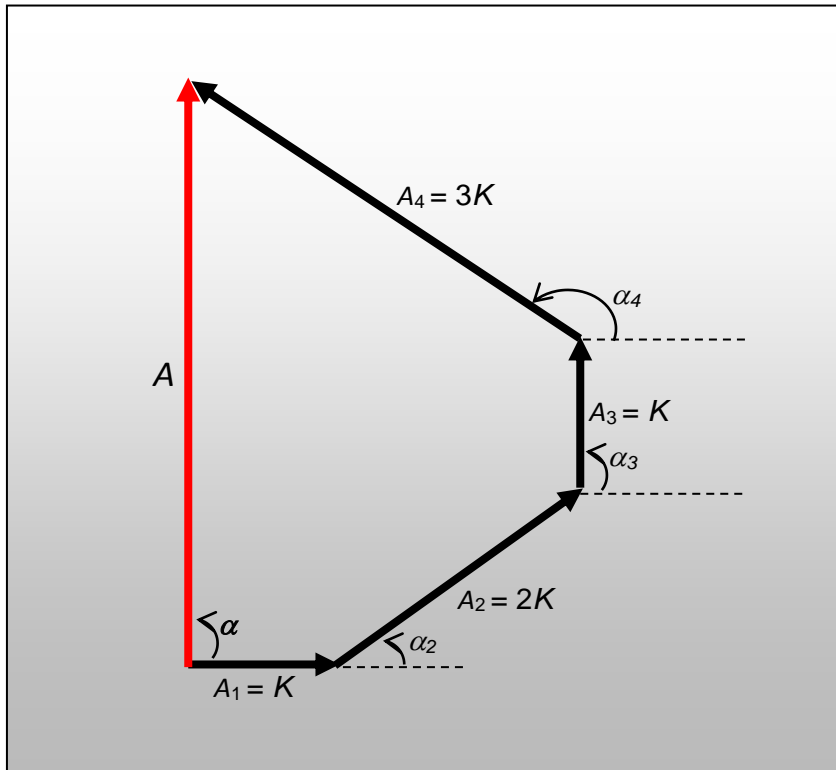


Figura N° 23: Diagrama de suma de fasores. La amplitud compleja resultante se dibujó en color rojo.

La amplitud resultante es $A \approx 7.8 K$ y la fase resultante es $\angle \alpha \approx 90^\circ$. Nótese que la fase de cada fasor se mide en sentido antihorario respecto al semieje positivo de las X y que $\alpha_1 = 0$.

Analicemos ahora algunos casos particulares, pero muy importantes, de superposición de ondas que se mueven en el mismo sentido y también en sentido contrario:

CASOS DE DOS ONDAS PARALELAS QUE SE MUEVEN EN LA MISMA DIRECCION.

- **Amplitudes Diferentes:**

Escribamos para empezar una forma lo suficientemente general para ondas armónicas utilizando como referencia la ecuación [26]:

$$\xi(z,t) = \sum_{i=1}^n A_i \cos \left[\omega_i \left(t - \frac{z}{v_i} \right) - \phi \right] \quad [35]$$

Supongamos ahora dos ondas ξ_1 y ξ_2 , cuyos parámetros son exactamente iguales, menos en su amplitud. La onda resultante estará dada por:

$$\begin{aligned} \xi_{12}(z,t) &= \xi_1(z,t) + \xi_2(z,t) = A_1 \cos \left[\omega \left(t - \frac{z}{v} \right) - \phi \right] + A_2 \cos \left[\omega \left(t - \frac{z}{v} \right) - \phi \right] \\ \xi_{12}(z,t) &= (A_1 + A_2) \cos \left[\omega \left(t - \frac{z}{v} \right) - \phi \right] \quad [36] \end{aligned}$$

Se observa entonces que la superposición solamente modifica la amplitud, de modo que la onda resultante, tendrá una amplitud igual a la suma de las amplitudes individuales, mientras que la frecuencia, la velocidad de fase y la fase seguirán siendo las mismas. Además, se puede inferir a partir de esto que, si tenemos más de dos ondas de amplitud distinta, pero con el resto de sus parámetros idénticos, podemos encontrar directamente la perturbación resultante, sumando las amplitudes individuales para obtener la amplitud total resultante, conservando el resto de la función de onda similar. Esta forma de encontrar la onda resultante corresponde al mismo **método algebraico**, pues obviamente se debe tener en cuenta el signo de las amplitudes individuales (que podrán ser negativas o positivas, de acuerdo a su dirección de vibración en el punto de interferencia).

- **Diferentes Fases:**

Tomemos ahora dos perturbaciones ξ_1 y ξ_2 , en las cuales $\varphi_1 \neq \varphi_2$, pero el resto de los parámetros son exactamente iguales. La onda resultante será:

$$\xi_{12}(z,t) = \xi_1(z,t) + \xi_2(z,t) = A \cos \left[\omega \left(t - \frac{z}{v} \right) - \varphi_1 \right] + A \cos \left[\omega \left(t - \frac{z}{v} \right) - \varphi_2 \right] =$$

$$\xi_{12}(z,t) = A \left\{ \cos \left[\omega \left(t - \frac{z}{v} \right) \right] \cos \varphi_1 + \sin \left[\omega \left(t - \frac{z}{v} \right) \right] \sin \varphi_1 + \right.$$

$$\left. \cos \left[\omega \left(t - \frac{z}{v} \right) \right] \cos \varphi_2 + \sin \left[\omega \left(t - \frac{z}{v} \right) \right] \sin \varphi_2 \right\} =$$

$$\xi_{12}(z,t) = A \left\{ \cos \left[\omega \left(t - \frac{z}{v} \right) \right] [\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2] + \sin \left[\omega \left(t - \frac{z}{v} \right) \right] [\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2] \right\} =$$

$$\xi_{12}(z,t) = A \left\{ \cos \left[\omega \left(t - \frac{z}{v} \right) \right] 2 \cos \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \cos \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} + \sin \left[\omega \left(t - \frac{z}{v} \right) \right] 2 \sin \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \cos \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \right\} =$$

$$\xi_{12}(z,t) = 2A \cos \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \bullet \cos \left[\omega \left(t - \frac{z}{v} \right) - \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \right] \quad [37]$$

Dado que tanto φ_1 como φ_2 son constantes, es posible escribir una nueva constante "B", representativa de la amplitud resultante que viene dada por:

$$B = 2A \cos \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \quad [38]$$

Luego, la perturbación resultante será:

$$\xi_{12}(z,t) = B \cos \left[\omega \left(t - \frac{z}{v} \right) - \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \right] \quad [39]$$

A partir de este resultado podemos concluir que la perturbación resultado de la perturbación es armónica, con la misma frecuencia, pero con distinta fase (igual al promedio de las fases originales) y diferente amplitud la cual viene dada por la ecuación [38].

En el caso particular para el cual coinciden las fases $\varphi_1 = \varphi_2$, se tendrá una onda resultante con amplitud doble e igual fase que cada uno de las ondas individuales, siendo entonces un caso particular de la suma de ondas de distinta amplitud que vimos en la sección anterior.

Cuando $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi$ se tiene que:

$$B = 2A \cos \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} = 2A \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

Este sería el caso de interferencia completamente destructiva.

La figura N° 24 nos muestra gráficamente dos de estos casos particulares.

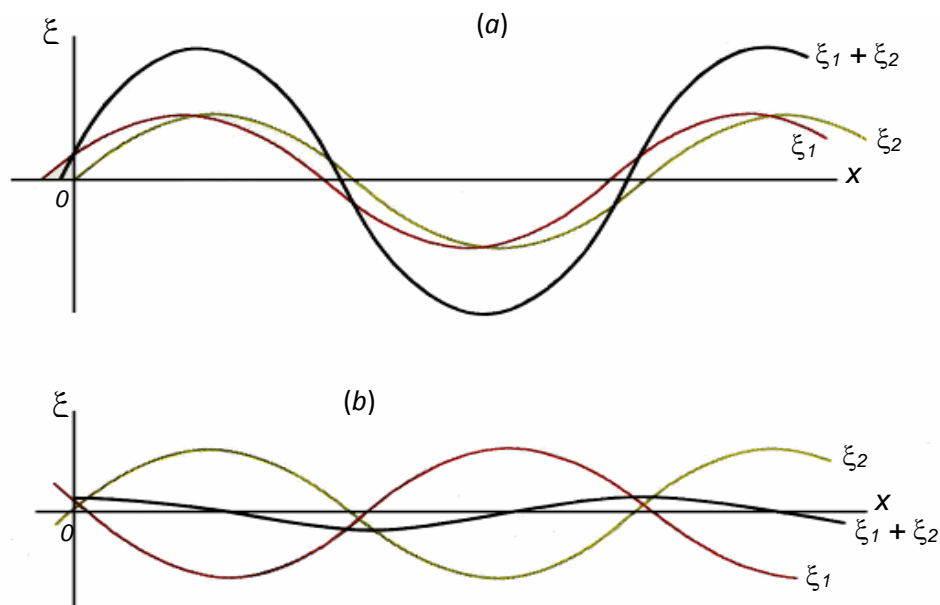


Figura N° 24: Superposición de ondas senoidales de igual frecuencia y amplitud. a) Cuando las ondas están aproximadamente en fase, la amplitud resultante es la suma de las amplitudes individuales. (b) Cuando las ondas difieren en fase aproximadamente 180° , la amplitud de la onda resultante se aproxima a cero y es más pequeña que cualquiera de las individuales.

○ **Diferentes Amplitudes y Fases:**

Si las fases y amplitudes de las dos perturbaciones son diferentes la perturbación resultante de la interferencia será:

$$\xi_{12}(z,t) = \xi_1(z,t) + \xi_2(z,t) = A_1 \cos \left[\omega \left(t - \frac{z}{v} \right) - \phi_1 \right] + A_2 \cos \left[\omega \left(t - \frac{z}{v} \right) - \phi_2 \right] =$$

$$\xi_{12}(z,t) = A_1 \left\{ \cos \left[\omega \left(t - \frac{z}{v} \right) \right] \cos \phi_1 + \sin \left[\omega \left(t - \frac{z}{v} \right) \right] \sin \phi_1 \right\} +$$

$$A_2 \left\{ \cos \left[\omega \left(t - \frac{z}{v} \right) \right] \cos \phi_2 + \sin \left[\omega \left(t - \frac{z}{v} \right) \right] \sin \phi_2 \right\} =$$

$$\xi_{12}(z,t) = (A_1 \cos \phi_1 + A_2 \cos \phi_2) \cos \left[\omega \left(t - \frac{z}{v} \right) \right] + (A_1 \sin \phi_1 + A_2 \sin \phi_2) \sin \left[\omega \left(t - \frac{z}{v} \right) \right]$$

Nuevamente definimos otras constantes a partir de los parámetros constantes originales:

$$B \cos \psi = (A_1 \cos \phi_1 + A_2 \cos \phi_2) \quad [40]$$

$$B \sin \psi = (A_1 \sin \phi_1 + A_2 \sin \phi_2) \quad [41]$$

El cual representa un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, que puede resolverse elevando al cuadrado y sumando para obtener a B y dividiendo una ecuación entre la otra para obtener ψ :

$$B = \sqrt{(A_1 \cos \phi_1 + A_2 \cos \phi_2)^2 + (A_1 \sin \phi_1 + A_2 \sin \phi_2)^2} \quad [42]$$

$$\psi = \arctan \frac{A_1 \sin \phi_1 + A_2 \sin \phi_2}{A_1 \cos \phi_1 + A_2 \cos \phi_2} \quad [43]$$

Con lo que se puede escribir el movimiento resultante como:

$$\xi_{12}(z,t) = B \cos \psi \cos \omega \left(t - \frac{z}{v} \right) + B \sin \psi \sin \omega \left(t - \frac{z}{v} \right) \quad [44]$$

$$\xi_{12}(z,t) = B \cos \left[\omega \left(t - \frac{z}{v} \right) - \psi \right] \quad [45]$$

Luego podemos concluir que la interferencia obtenida será una onda armónica con una nueva amplitud y una nueva fase. No aparecerá en ningún caso interferencia completamente destructiva, debido a que cuando $A_1 \neq A_2$ el valor de B nunca será nulo. Es interesante revisar a partir de estos resultados las mismas ecuaciones para el caso donde $A_1 = A_2$ y $\varphi_1 = \varphi_2$.

○ **Diferentes Frecuencias:**

En este caso la función de onda resultante tendrá la forma:

$$\xi_{12}(z,t) = \xi_1(z,t) + \xi_2(z,t) = A \cos \left[\omega_1 \left(t - \frac{z}{v} \right) - \varphi \right] + A \cos \left[\omega_2 \left(t - \frac{z}{v} \right) - \varphi \right] =$$

Y siguiendo el procedimiento indicado para el caso de diferentes fases se llega al siguiente resultado:

$$\xi_{12}(z,t) = 2A \cos \left[\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \left(t - \frac{z}{v} \right) \right] \cos \left[\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \left(t - \frac{z}{v} \right) - \varphi \right] \quad [46]$$

La interpretación de este resultado sería la de una oscilación con una **frecuencia angular promedio** $\bar{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ y con una amplitud que en cada punto varía armónicamente con el tiempo, con una **frecuencia angular modulada** $\omega_m = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$. Si las frecuencias son iguales se obtiene la ecuación [36] con

$A_1 = A_2 = A$, pero si son muy próximas, es decir que $\omega_1 \approx \omega_2$, entonces, $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \approx \omega_1$ y $\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$ es pequeña, con lo cual la amplitud varía lentamente respecto al tiempo. A este efecto, se le llama "**batido**" y se usa frecuentemente en electrónica.

Del mismo modo se pueden definir el **número de propagación promedio** $\bar{k} = \frac{k_1 + k_2}{2}$ y el **número de propagación de modulación** $k_m = \frac{k_1 - k_2}{2}$ a partir de los cuales se puede escribir la onda resultante como:

$$\xi_{12}(z,t) = 2A \cos(k_m z - \omega t) \cos(\bar{k} z - \bar{\omega} t) \quad [47]$$

ó

$$\xi_{12}(z,t) = B(z,t) \cos(\bar{k} z - \bar{\omega} t) \quad [48]$$

A partir de esta onda, cuya amplitud es variable y función de la coordenada espacial y del tiempo, designada como $B(z, t)$, que constituye una *onda portadora de alta frecuencia* ($\bar{\omega}$) *modulada en amplitud por una función coseno*, podemos obtener una expresión para la **velocidad de grupo** con la cual se desplaza la combinación de ondas que, en general, es distinta a la velocidad de fase de cada onda en particular.

La velocidad de fase vendrá dada por la expresión $V = \frac{\bar{\omega}}{\bar{k}}$, esta será la velocidad de fase esté o no modulada la onda portadora, pero lo que tratamos de encontrar es una expresión que nos de la velocidad de la envolvente moduladora que avanza con una velocidad conocida como la velocidad de grupo, y en medios no dispersores en los cuales la longitud de onda es independiente de la longitud de onda como las ondas componentes tendrán la misma velocidad la velocidad de grupo $v_g = v = v_1 = v_2 \dots$. Pero qué ocurre si el medio es dispersor; la onda modulada

avanzará con una velocidad de grupo dependiente de las fases de la envolvente, así:

$$V_g = \frac{\omega_m}{k_m} \quad [49]$$

ó

$$V_g = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \quad [50]$$

Se sugiere como ejercicios⁹ determinar las ondas resultantes para otros casos tales como cuando las ondas tienen diferentes frecuencias y velocidades (tome en consideración que, en un medio homogéneo, la única manera de que varíe la velocidad es si la frecuencia lo hace), se podrá comprobar en este caso que igualmente ocurre un batido similar al obtenido en el caso anterior. Para el caso más general de diferentes fases, amplitud y frecuencia simultáneamente, el resultado será una mezcla de interferencia y de batido.

▪ **CASOS DE DOS ONDAS PARALELAS QUE SE MUEVEN EN DIRECCION CONTRARIA.**

Los casos correspondientes a perturbaciones ondulatorias paralelas y de sentido contrario, tampoco serán tratados aquí en detalle, pero hacemos un resumen de los resultados y la interpretación de algunos casos particulares.

○ **Velocidades contrarias (ONDAS ESTACIONARIAS)**

En este caso, $A_1 = A_2 = A$; $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$; $\omega_1 = \omega_2 = \omega$; $v_1 = -v_2 = v$, el resultado se obtiene de manera similar al caso anterior, de diferentes fases, según el procedimiento seguido para obtener la ecuación [31]. Nos da entonces:

$$\xi_{12}(z,t) = 2A \cos\left(\frac{\omega}{v}z\right) \cdot \cos[\omega t - \varphi] \quad [51]$$

⁹ Un análisis de todos los casos restantes se puede encontrar en “Ondas” (BREISSAN-GAVIOLA, 1975: 20-27)

Obsérvese que en este caso la amplitud depende de z , es decir de la coordenada espacial, lo cual podemos escribir así:

$$\xi_{12}(z,t) = B(z) \bullet \cos[\omega t - \phi] \quad [52]$$

y la oscilación resultante no es viajera sino una **onda estacionaria**. De hecho todas las partículas oscilarán armónicamente, cada una con una amplitud propia B que depende de la coordenada espacial z . La magnitud de la amplitud varía desde $2A$ en aquellas partículas donde:

$$z = n \pi \frac{v}{\omega} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad [53]$$

hasta cero, donde la coordenada z es igual a:

$$z = m \frac{\pi v}{2\omega} \quad m = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots \quad [54]$$

Cuando ocurre este tipo de oscilación resultante, no es posible observar ni un avance o retroceso de la onda, no existe sentido de propagación de la onda, porque las oscilaciones son estacionarias. Un ejemplo ya había sido mostrado en la figura N° 16, ahora agregamos un esquema de las mismas vibraciones armónicas estacionarias en una cuerda tensa como se ve en la figura N° 25.

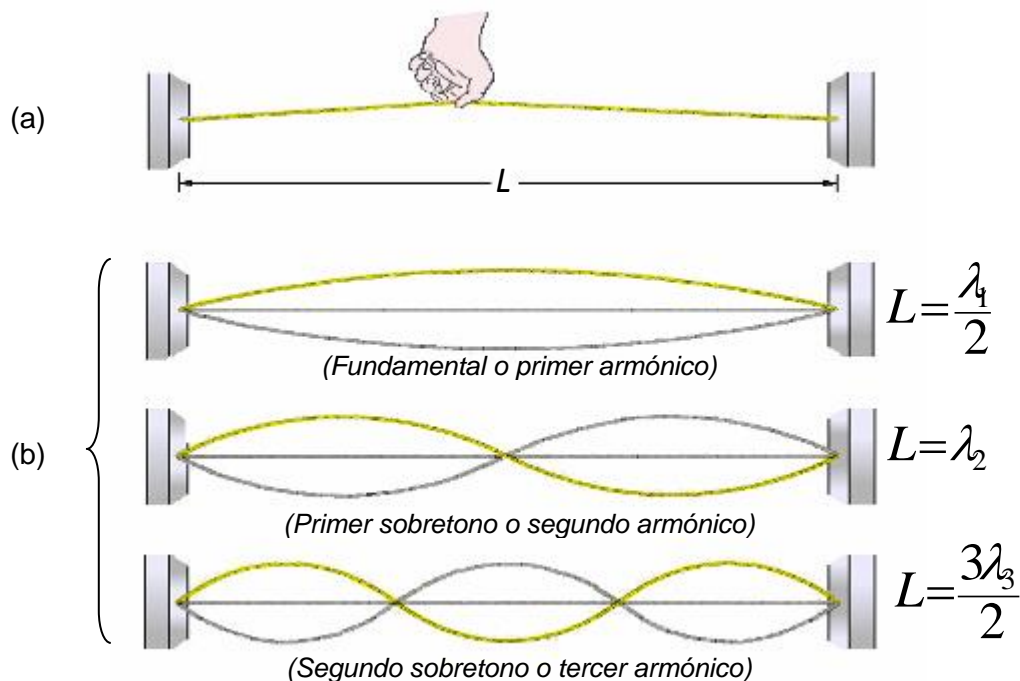


Figura N° 25: Ondas estacionarias en una cuerda tensa, en sus diferentes modos o armónicos. (a) se pulsa la cuerda (b) sólo persisten las ondas estacionarias que corresponden a las frecuencia resonantes

Las frecuencias para las cuales se reproducen ondas estacionarias son la **frecuencia natural** y las **frecuencias resonantes** de la cuerda y, los distintos modos de vibración, que se ven en la figura N° 25, se conocen como **modos de vibración resonante**.

Cuando una cuerda produce ondas estacionarias está vibrando en el mismo lugar, y a las frecuencias resonantes no se necesita mucha energía para alcanzar una amplitud grande. Por ello, aunque en la cuerda pulsada aparecerán ondas viajeras en ambos sentidos, las cuales se reflejan en los extremos empotrados y regresan en sentido contrario, la mayoría de ellas interferirán y desaparecerán rápidamente, excepto aquellas con frecuencia resonante, que en la medida que sea mayor generan nuevos nodos, dando origen a los llamados **modos de resonancia**. La frecuencia mínima se llama **frecuencia fundamental** y corresponde a media longitud de onda $L = \lambda_1/2$, donde λ_1 es la frecuencia fundamental. Las otras frecuencias naturales se llaman **sobretonos**, cuando son múltiplos enteros de la fundamental se denominan **armónicos**, y a la fundamental **primer armónico**, al siguiente **segundo armónico** o primer sobretono.

Se pueden obtener ondas estacionarias a partir de un arreglo adecuado para toda clase de ondas, incluyendo las ondas electromagnéticas, por ejemplo si utilizamos un espejo y obtenemos una onda reflejada en la misma dirección pero en sentido contrario a la onda luminosa incidente.

En la lámina perfectamente conductora del espejo la onda electromagnética resultante debe tener una componente del campo eléctrico nula paralela a la superficie, lo cual resulta equivalente al hecho de que el desplazamiento del soporte de una cuerda en sus extremos empotrados es cero. Sin embargo, si la

reflexión del espejo no es perfecta, como ocurre con frecuencia, la onda compuesta tendrá una componente viajera junto con la onda estacionaria (más adelante se explicará este caso de **reflexión parcial**). En tal caso habrá una transferencia neta de energía, al contrario de lo que ocurre con la onda estacionaria pura donde no existe ninguna transferencia energética.

La función de onda electromagnética se escribe corrientemente en función del vector de campo eléctrico u “**onda eléctrica**”, debido a que es más intensa que el campo magnético y porque además resulta suficiente su descripción dado que, los campos eléctricos y magnéticos están perfectamente acoplados, son perpendiculares y desfasados en 90° , pro lo cual la variación de uno produce al otro, y viceversa¹⁰.

De modo que la superposición de dos ondas electromagnéticas sinusoidales de la misma frecuencia y amplitud propagándose en direcciones opuestas, tales como:

$$\text{Onda incidente: } E_i(z,t) = E_0 \text{ sen}[kz + \omega t + \phi_i] \quad [55]$$

$$\text{Onda reflejada: } E_r(z,t) = E_0 \text{ sen}[kz + \omega t + \phi_r] \quad [56]$$

Nos conduce a una onda resultante como la siguiente:

$$E(z,t) = E_0 \text{ sen}[kz + \omega t + \phi_i] + E_0 \text{ sen}[kz + \omega t + \phi_r] \quad [57]$$

Pero, podemos agregar algunas simplificaciones al resultado tomando en cuenta algunas cosas, por ejemplo, dado que $E_{0i} = E_{0r} = E_0$, pues suponemos que la onda es totalmente reflejada y no hay transferencia de energía, las condiciones de borde requieren, como ya hemos dicho, que en $z = 0$, $E_0 = 0$, y asumiendo

¹⁰ Este tema se desarrollará con mayor detalle en los subsiguientes apuntes teóricos de óptica, relacionados con los fenómenos de propagación de la luz y las leyes de Maxwell. La referencia se hace sólo para mostrar la similitud con las ondas estacionarias mecánicas.

arbitrariamente el valor de $\varphi_i = 0$, podemos determinar a partir de [51] y [52] que el valor de $\varphi_r = 0$. Entonces la perturbación nos queda:

$$E(z,t) = E_0 [\text{sen}(kz + \omega t) + \text{sen}(kz - \omega t)] \quad [58]$$

Ahora usando la identidad trigonométrica:

$$\text{sen}\alpha + \text{sen}\beta = 2 \text{sen}\frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

Obtendremos:

$$E(z,t) = 2E_0 \text{sen}kz \cdot \cos\omega t \quad [59]$$

Expresión que coincide plenamente con la ecuación [52].

Nuevamente queda establecido que el perfil de la onda [59] no se mueve en el espacio y representa una onda luminosa o electromagnética “**estacionaria**”. En cualquier punto del eje $z = z'$ la amplitud es una constante igual a $2E_0 \text{sen}kz'$ y $E(z',t)$ varía armónicamente con $\cos\omega t$.

En ciertos puntos, la perturbación será cero en todo instante, justamente aquellos donde se anula la amplitud, tales como $z = 0, \lambda/2, 3\lambda/2, \dots$, estos puntos se conocen como “**puntos nodales**” o “**nodos**”. En el punto medio entre cada par de nodos la amplitud será $\pm 2E_0$, lo cual ocurre para $z = \lambda/4, 3\lambda/4, \dots$, estos puntos se llaman “**antinodos**”. La figura N° 26 muestra una representación de la onda estacionaria y sus respectivos nodos y antinodos, los cuales coinciden además con los calculados según las ecuaciones [53] y [54].

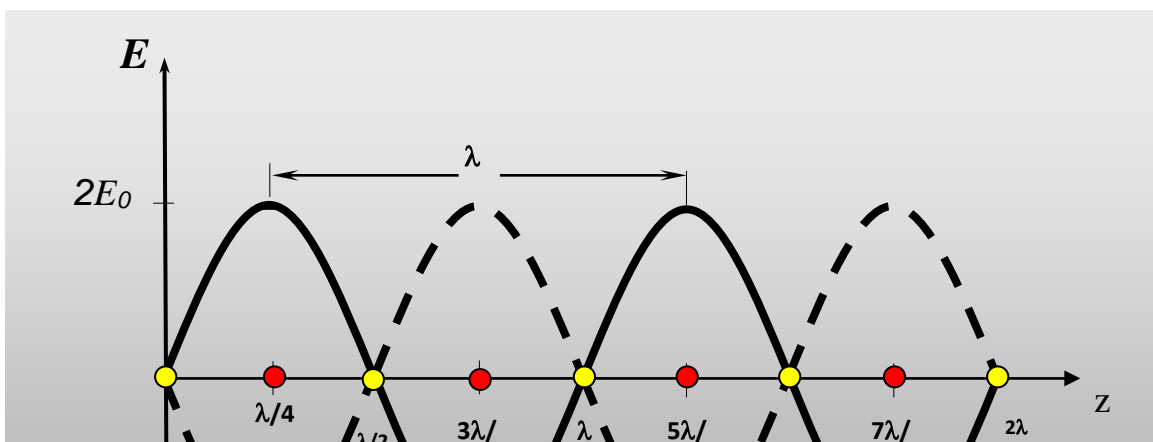


Figura N° 26: Diagrama de una onda luminosa estacionaria, por reflexión en un espejo, indicando los diferentes nodos (amarillos) y antinodos (rojos).

Es interesante observar que la amplitud λ de la onda estacionaria resultante se puede obtener directamente, como la distancia entre dos nodos, o antinodos, consecutivos. Este fue precisamente el método usado por **Hertz** para determinar la longitud de ondas radio-eléctricas, y pocos años más tarde **Otto Wiener**¹¹ demostró por primera vez la existencia de ondas estacionarias en las ondas luminosas.

○ **Diferentes amplitudes (REFLEXION PARCIAL):**

Si las ondas aun cuando son paralelas y opuestas no tienen igual amplitud ($A_1 < A_2$), se puede resolver descomponiendo la onda de mayor amplitud en dos ondas, a saber; una de amplitud igual a la opuesta (A_1) y otra de amplitud igual a la diferencia ($A_2 - A_1$). Resultará una onda estacionaria superpuesta a la onda diferencia:

$$\xi_{12}(z,t) = 2A_1 \cos\left(\frac{\omega}{v}z\right) \cos\left[\omega t - \phi\right] + (A_2 - A_1) \cos\left[\omega\left(t - \frac{z}{v}\right) - \phi\right] \quad [60]$$

Se ha supuesto que la onda de mayor amplitud (A_2) se propaga en el sentido creciente del eje z . Esto corresponde justamente al caso en el cual se tiene “**reflexión parcial**” de ondas planas en un espejo normal.

¹¹ Para una referencia más detallada sobre los experimentos de Wiener se recomienda la lectura de “*Óptica*” (HETCH-ZAJAC, 1994: 213-214)

Los casos correspondientes a composición o superposición de ondas perpendiculares o normales entre sí y del mismo sentido, se dejan para el estudio de la luz polarizada, la cual será tratada en el tema de polarización de la luz.