NOTAS DE MATEMATICA

Nº 97

UNA NOTA SOBRE OPERADORES NUCLEARES Y DOMINADOS DEFINIDOS SOBRE $C(\Omega,X)$

POR

WILMAN BRITO

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

FACULTAD DE CIENCIAS

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

MERIDA-VENEZUELA

1988

UNA NOTA SOBRE OPERADORES NUCLEARES Y DOMINADOS DEFINIDOS SOBRE $C(\Omega, X)$

POR

WILMAN BRITO

RESUMEN. La presente nota, en su primera parte, concierne con los así llamados operadores nucleares y absolutamente sumantes definidos sobre $C(\Omega,X)$, el espacio de Banach de las funciones continuas X-valuadas definidas sobre un compacto Hausdorff Ω, donde X es un espacio de Banach. Probamos que [Ω es un compacto Hausdorff fijo] si Y es un espacio de Banach dado y si cualquier que sea el espacio de Banach X, las clases $AS(C(\Omega,X), Y)$ y $N(C(\Omega,X),Y)$ son idénticas, entonces Y tiene la propiedad de Radon-Nikodým. En la segunda parte establecemos que si cualquier operador lineal dominado $T:C(\Omega,X) \to X$ es débilmente compacto, entonces X es reflexivo.

1. NOTACIONES Y DEFINICIONES. En todo lo que sigue X e Y denotarán espacios de Banach sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$ (= $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$). X^* denotará el dual topológico de X, mientras que por $L(X,Y)$ se entenderá el espacio de Banach de todos los operadores (lineales y acotados) T de X en Y dotado de la norma uniforme; esto es, $|||T||| = \sup\{||Tx|| : x \in X, ||x|| \leq 1\}$. $C(\Omega,X)$ es el espacio de Banach de todas las funciones continuas definidas sobre Ω (espacio compacto Hausdorff) con valores en X, y con la norma del supremo:

donde el ínfimo se elige sobre todas las sucesiones (x_n^*) y (y_n) de X^* e Y respectivamente que satisfacen (2). Si denotamos por $N(X,Y)$ la clase de todos los operadores nucleares de X en Y, entonces $N(X,Y)$ es un espacio de Banach bajo la norma nuclear ([P], 3.1.3). Más aún, se tienen las siguientes relaciones ([P], 3.2.5 y 3.2.13)

$$N(X,Y) \subseteq AS(X,Y) \quad , \quad \|T\|_{as} \leq \|T\|_{nuc} \, , \quad T \in N(X,Y) \tag{3}$$

Un operador lineal acotado $T: X \to Y$ se llama **Pietsch integral** si existe una medida Y-valuada, numerablemente aditiva y de variación acotada G definida sobre los conjuntos de Borel (para la topología w^*) de la bola unitaria cerrada B_1^* de X^* tal que

$$Tx = \int_{B_1^*} x^*(x) \, dG(x^*) \; , \quad x \in X. \tag{4}$$

Denotando por $PI(X,Y)$ la clase de los operadores Pietsch integrales, entonces este resulta ser un espacio de Banach provisto de la norma

$$\|T\|_{pi} = \inf |G| \, (B_1^*), \quad T \in PI(X,Y),$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las medidas G que satisfacen (4). Véase ([D-U], pág. 165).

Se puede demostrar ([D-U], VI, pág. 165-176) que

$$N(X,Y) \subset PI(X,Y) \subset AS(X,Y), \quad \|T\|_{as} \leq \|T\|_{pi} \leq \|T\|_{nuc} \, , \quad T \in N(X,Y) \tag{5}$$

La siguiente definición se puede ver en [D-U], pág. 61.

Un espacio de Banach X tiene la propiedad de Radon-Nikodým con respecto a (S, Σ, μ) si para cada medida vectorial $G: \Sigma \to X$ μ-continua y de variación acotada, existe $g \in L_1(\mu, X)$ tal que $G(E) = \int_E g\,d\mu$ para todo $E \in \Sigma$. X se dice que tiene la *propiedad de Radon-Nikodým* si X tiene la propiedad de Radon-Nikodým con respecto a cualquier espacio de medida finita.

El siguiente resultado, el cual puede ser encontrado en [D-U], VI-4, Teo. 8), será crucial en la prueba de nuestro primer resultado.

TEOREMA 1 ([D-U], VI-4, Teo. 8). Un espacio de Banach Y tiene la propiedad de Radon-Nikodým si y sólo si para todo espacio de Banach X, todo operador Pietsch-integral de X en Y es nuclear. En este caso, $PI(X,Y)$ y $N(X,Y)$ son clases idénticas con normas idénticas.

Como hemos señalado anteriormente $N(X,Y) \subseteq AS(X,Y)$, en particular $N(C(\Omega), Y) \subseteq AS(C(\Omega), Y)$. Un resultado más profundo es demostrado en [D-U], Corolarios 5 y 7, pág. 174-175.

COROLARIO 1'. (i) Si X tiene la propiedad de Radon-Nikodým, entonces cualquier operador absolutamente sumante de $C(\Omega)$ en X es nuclear con $\|T\|_{nuc} = \|T\|_{as}$. En consecuencia, $PI(C(\Omega),X)$, $AS(C(\Omega),X)$ y $N(C(\Omega),X)$ son clases idénticas con normas idénticas.

ii) El espacio X tiene la propiedad de Radon-Nikodým si y sólo si para todo espacio compacto de Hausdorff Ω, todo operador absolutamente sumante de $C(\Omega)$ en X es nuclear.

Vamos ahora a probar un resultado parcial a (ii) del Corolario 1', cuando reemplazamos $C(\Omega)$ por $C(\Omega, X)$; específicamente tenemos:

TEOREMA 2. Sean Ω un espacio Hausdorff compacto e Y un espacio de Banach. Si para cualquier espacio de Banach X, las clases $AS(C(\Omega,X),Y)$ y $N(X(\Omega,X),Y)$ son idénticas, entonces Y tiene la propiedad de Radon-Nikodým.

PRUEBA. Suponga que para todo espacio de Banach X las clases $AS(C(\Omega,X),Y)$ y $N(X(\Omega,X),Y)$ son idénticas. Nos proponemos demostrar que, en este caso, $AS(X,Y)$ y $N(X,Y)$ son clases idénticas. En efecto, como $N(X,Y) \subseteq AS(X,Y)$ sólo nos resta demostrar que $AS(X,Y) \subseteq N(X,Y)$. Sea $L \in AS(X,Y)$. Dado $t_o \in \Omega$, t_o fijo, elijamos una $g \in C(\Omega)$ tal que $g(t_o) = 1$, y defínase ahora $S_o\colon C(\Omega,X) \to X$ por $S_o(f) = f(t_o)$ para todo $f \in C(\Omega,X)$. Ya que $L \in AS(X,Y)$ y S_o es lineal acotado, entonces el operador $T\colon C(\Omega,X) \to Y$ definido por $T = L \circ S_o$ es absolutamente sumante y así, por hipótesis, nuclear. Escojamos entonces sucesiones (ψ^*) en $C(\Omega,X)^*$ y (y_n) en Y de modo que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\psi_n^*\| \; \|y_n\| < \infty \quad \text{y} \quad Tf = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n^*(f)\, y_n, \quad f \in C(\Omega,X).$$

Para cada $n = 1,2,\ldots$, definamos $x_n^*\colon X \to \mathbb{K}$ poniendo $x_n^*(x) = \psi_n^*(xg)$, $x \in X$. Entonces $(x_n^*) \subseteq X^*$, y ya que $\|x_n^*\| \leq \|\psi_n^*\| \, \|g\|_\infty$, $L(x) = T(xg)$, $x \in X$ se sigue que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n^*\| \, \|g_n\| < \infty \quad \text{y} \quad L(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x)\, y_n, \quad x \in X.$$

Esto prueba que L es nuclear, por lo que $AS(X,Y)$ y $N(X,Y)$ son clases idénticas. Por (5) se concluye que $PI(X,Y)$ y $N(X,Y)$ son clases idénticas para todo espacio de Banach X. Un llamado al Teorema 1, nos revela entonces que Y tiene la propiedad de Radon-Nikodým. Esto termina la prueba.

2. Un resultado de Batt and Berg ([B-B], Teo. 8 establece que si X es reflexivo, entonces cualquier operador lineal dominado T de $C(\Omega,X)$

en otro espacio de Banach Y es débilmente compacto. Aquí observamos que si cualquier operador lineal dominado $T: C(\Omega,X) \to X$ es débilmente compacto, entonces X es reflexivo.

Recordemos que un operador lineal acotado $T: C(\Omega,X) \to Y$ se dice **dominado** si existe una medida de Borel regular no-negativa μ definida sobre Ω tal que

$$\|Tf\| \leq \int_\Omega \|f(t)\| \, d\mu(t), \qquad f \in C(\Omega,X),$$

y un $T \in L(X,Y)$ se dice **debilmente compacto** si T transforma subconjuntos norma-acotados de X en su conjuntos débilmente relativamente compactos de Y.

TEOREMA 3. Si cada operador lineal dominado $T: C(\Omega,X) \to X$ es débilmente compacto, entonces X es reflexivo.

PRUEBA. Sea $t_0 \in \Omega$, t_0 fijo, y escojamos una $\phi \in C(\Omega)$ tal que $\phi(t_0)=1$. Definiendo $T: C(\Omega,X) \to X$ mediante $T(f) = f(t_0)$, $f \in C(\Omega,X)$ vemos que T es dominado, ya que $\|Tf\| = \int_\Omega \|f(t)\| \, d\delta_{t_0}(t)$, $f \in C(\Omega,X)$, donde δ_{t_0} es la medida de Dirac concentrado en t_0. Por hipótesis, T es débilmente compacto y como el conjunto $A = \{x\phi : \|x\| \leq 1\}$ es norma-acotado en $C(\Omega,X)$ se sigue que $TA = \{x : \|x\| \leq 1\}$ es débilmente relativamente compacto y, por lo tanto, débilmente compacto. Por un resultado bién conocido, se tiene que X es reflexivo.

3. Un resultado de Swartz ([S], Teo. 12) establece que un operador li -