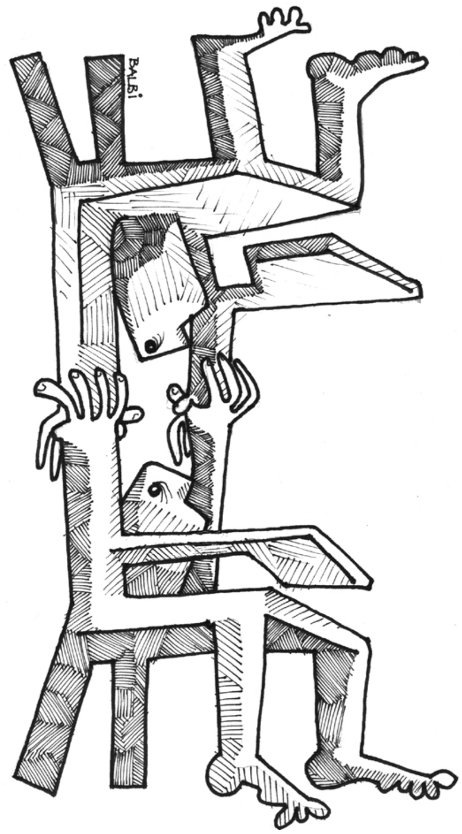
Investigación arbitrada

El enfoque comunicativo en la enseñanza del Álgebra: una experiencia didáctica

Algebra and communicative approach: a pedagogical experience



Clara Cristina Catarina Eccius Wellmann
ceccius@up.edu.mx
Universidad Panamericana campus Guadalajara
Escuela de Ciencias Económicas y Empresariales
Ciudad Granja, Zapopan, Jalisco. México

Antonio Lara-Barragán Gómez
alara@up.edu.mx
Universidad Panamericana campus Guadalajara
Facultad de Ingeniería
Ciudad Granja, Zapopan, Jalisco. México

Josefina Santana Villegas
jsantana@up.edu.mx
Universidad Panamericana campus Guadalajara
Centro de Lenguas
Ciudad Granja, Zapopan, Jalisco. México

Artículo recibido: 20/01/2016
Aceptado para publicación: 10/03/2016

Resumen

En el presente trabajo partimos de la idea de que la matemática es un lenguaje en sí mismo y, en consecuencia, puede enseñarse usando la misma didáctica empleada para la enseñanza de un segundo idioma. En el trabajo se discute brevemente por qué la matemática es un lenguaje y se describe la enseñanza de un segundo idioma desde el enfoque comunicativo, sus principios y sus prácticas. Tales principios y prácticas se aplicaron para desarrollar una didáctica comunicativa para la enseñanza del álgebra, la cual se aplicó a un curso de licenciatura. En el trabajo se muestran las secuencias didácticas desarrolladas con base en el enfoque comunicativo y algunos resultados cuantitativos de la aplicación de estas secuencias.

Palabras clave: Enseñanza de matemáticas, Enfoque Comunicativo, rendimiento académico, didácticas especiales.

Abstract

This research starts from the fact that maths are considered to be a language by themselves and, as a consequence can be taught using the same methodology applied in the teaching of Second Languages. In this paper it is briefly discussed why maths are considered to be a language and it is described the teaching of a second language from a communicative approach, as well as their principles and practices. Such principles and practices were applied to develop a communicative pedagogy for teaching algebra, which was carried out in degree courses. It is also shown the sequence of didactic units developed and based on a communicative approach and some quantitative results product of the application of these sequences.

Keywords: math teaching, communicative approach, academic performance, special didactics.

Introducción

Parece ser un hecho que, a partir de las últimas décadas, el *Enfoque Comunicativo* (EC) en el aula es uno de los más utilizados por docentes en el ámbito de los idiomas como segundas lenguas (Segade, 2012). El EC fue desarrollado en Inglaterra y partir de éste se desarrolló, a su vez, la llamada Enseñanza Comunicativa de Lenguas (CLT, por sus siglas en inglés) que se comenzó a utilizar en aquella nación en la década de 1960 como método de enseñanza del inglés como segunda lengua (Demirezen, 2011). A partir de entonces, el EC y la CLT se difundieron rápidamente, primero entre países angloparlantes, por toda Europa y, finalmente, por todo el mundo y se ha posicionado como una de las técnicas de mayor impacto para la creación de nuevos enfoques, teorías y métodos para la enseñanza del inglés.

Por otro lado, la enseñanza de las matemáticas ha pasado por diversas etapas en cuanto a su desarrollo (de Guzmán, 2007). Sin embargo, y a pesar de la gran cantidad de esfuerzos, los procesos de enseñanza de las matemáticas continúan sin ofrecer respuestas completamente adecuadas para un aprendizaje efectivo. Creemos que, una buena parte de este problema está dado por la situación de estrés inducido por la llamada Ansiedad Matemática (Legg y Locker, 2009; Leppävirta, 2011; Eccius y Lara-Barragán, 2016), la que a su vez puede generarse por técnicas inapropiadas de enseñanza. Así, si la Matemática se considera como una lengua, una alternativa más amigable de enseñanza puede ser, también, enfocarla de acuerdo con el EC. Nuestro propósito es presentar una experiencia didáctica obtenida de esta alternativa.

1. Planteamiento del problema

Como discutiremos brevemente en la siguiente sección, existe un criterio acerca de que las matemáticas no sólo tienen un lenguaje propio, sino que son en sí mismas un lenguaje, puesto que contienen, entre otras cosas, un conjunto de símbolos semióticos universalmente aceptados para las representaciones conceptuales, cuya semántica es, asimismo, de aceptación generalizada. A su vez, el uso de tales símbolos se rige por una serie de reglas gramaticales de uso igualmente aceptado, por lo que puede concluirse que las matemáticas constituyen un lenguaje formal en el mismo sentido que son lenguajes formales el español y el inglés.

Por otro lado, es evidente que la enseñanza de las matemáticas no ha rendido los frutos esperados por los discursos educativos oficiales en nuestro país. Los resultados de los estudiantes mexicanos en las pruebas del PISA, disponibles en los sitios web de la OCDE, son altamente elocuentes. Una consecuencia de ello es el hecho de que los estudiantes que llegan a nuestra universidad a las áreas de Ingenierías y de Empresariales muestran deficiencias en su formación matemática. Asimismo hemos observado que, entre el profesorado, los métodos de enseñanza van desde lo más tradicional, repetición mimética y memorización sin razonamiento, hasta lo más avanzado en didáctica, constructivismo y métodos de aprendizaje cooperativo, entre otros, los cuales no siempre dan los resultados esperados por nuestras autoridades educativas.

De lo anterior planteamos nuestro problema como una hipótesis de trabajo en los siguientes términos:

Dado que consideramos que las matemáticas son un lenguaje en sí mismas, una forma alternativa de enseñanza que conduce a resultados satisfactorios es a través de estrategias didácticas análogas a las utilizadas para la enseñanza de los idiomas.

De aquí, los objetivos del trabajo son:

Caracterizar detalladamente una de las estrategias didácticas más utilizadas en la enseñanza del inglés como segunda lengua.

Desarrollar estrategias didácticas para las matemáticas con base en las estrategias didácticas para la enseñanza del inglés.

Llevar a cabo un estudio cuasiexperimental para probar la eficacia de las estrategias didácticas desarrolladas a nivel piloto.

2. Marco teórico

2.1. La Matemática como lenguaje

Podemos afirmar que Galileo Galilei fue el primer científico que reconoció el carácter de lenguaje de las matemáticas al expresar su memorable aseveración consignada en su obra publicada en 1623, *El Ensayador*: "La filosofía está escrita en ese grandísimo libro que tenemos abierto ante los ojos, quiero decir, el universo, pero no se puede entender si antes no se aprende a entender la lengua, a conocer los caracteres con que está escrito. Está escrito en lengua matemática y sus caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin las cuales es imposible entender ni una palabra; sin ellos es como girar vanamente en un obscuro laberinto" (Galilei, 1981: 62-63; Arana, 2000: 44).

Que la matemática es un lenguaje ha sido reconocido por diversos autores, como lo muestra una profunda revisión encontrada en Ospitaletche-Borgmann y Martínez Luaces (2012), en la que se mencionan autores como David Peat, quien afirma que "la matemática ha aislado y refinado varios de los elementos abstractos que son esenciales a todos los lenguajes humanos" (p. 7), mientras que otros autores hacen precisiones sobre este concepto. Tal es el caso de Bogomolny que asegura que "el lenguaje matemático es mucho más exacto que cualquier otro que uno pueda pensar" (p. 8). Por otro lado, Ospitaletche-Borgmann y Martínez Luaces citan a Frank B. Allen, con cuya postura concordamos cabalmente en nuestro trabajo: "el antídoto para la miopía de ciertas demandas pragmáticas de utilidad inmediata es la comprensión de la naturaleza (de la matemática) que puede ser impartida por el enfoque lingüístico" (p. 8)

Finalmente, en la revisión de Ospitaletche-Borgmann y Martínez Luaces se mencionan dos autores considerados de gran importancia en el campo de la enseñanza de las matemáticas como lenguaje, Hermann Maier y Fritz Schweiger, quienes plantean "el método de enseñar el lenguaje de las matemáticas a través de la realización de diálogos e interacciones entre los alumnos y entre éstos y el profesor como guía, buscando de esta forma en conjunto –utilizando el razonamiento y la formalización– la solución de los problemas expuestos por el profesor, o eventualmente por el programa de la materia." (p. 9)

En nuestra concepción, comenzamos con la caracterización del concepto de lenguaje. Para ello, ha de reconocerse, en primer lugar, que todo lenguaje se compone de un conjunto de elementos discretos con el que es posible desarrollarlo; tal conjunto es lo que conocemos como *vocabulario*. Con respecto a esta característica sabemos que el vocabulario de la Matemática utiliza términos y vocablos tomados del lenguaje cotidiano. Sin embargo, los significados que se les dan en matemáticas poseen un carácter unívoco. Por ejemplo, radio, función, e integral (Maier, 2004).

En segundo lugar, los elementos se relacionan entre sí por medio de reglas de sintaxis, de manera que las secuencias de ellos tengan un significado o alcance semántico. Es claro que los lenguajes como el español y el inglés tienen estas características; de hecho es de ellos de donde se infiere la existencia de ambas características. Por otro lado, también está claro que en estos lenguajes existe la posibilidad de construir aserciones falsas como, por ejemplo, "la historia antigua indica que los romanos inventaron el cero". En matemáticas esta clase de constructos no pueden ser posibles; los conjuntos de proposiciones, los axiomas y los teoremas son todos ellos verdaderos.

Una tercera característica no mencionada al inicio de esta discusión es la semiótica. Es indiscutible que la Matemática posee símbolos, muchas veces icónicos, para representar ideas, conceptos y palabras. Por ejemplo, los muy conocidos tres puntos, , para indicar la serie de palabras *por lo tanto*, y el símbolo "≠" para la secuencia *diferente de*. El carácter de lenguaje de las matemáticas se evidencia, así, en que el uso de toda la simbología matemática se rige por reglas sintácticas incuestionables.

Finalmente, así como los lenguajes tienen un carácter utilitario, la Matemática también es utilitaria, dado que ella constituye el lenguaje con el que las ciencias se formalizan y adquieren una representación precisa y unívoca.

Es por esto que, al considerar que las matemáticas son un lenguaje, hemos pensado en el desarrollo de un modelo educativo basado en una didáctica de segunda lengua para su aplicación a la enseñanza del álgebra. A continuación presentamos el desarrollo de tal modelo.

2.2. El Modelo Educativo

A partir de 1960 el modelo educativo predominante para la enseñanza de los idiomas se conoce como *Enfoque Comunicativo* (EC), cuyo énfasis está en el "estudio de los significados, de su expresión, comprensión y negociación" (Luzón y Soria, 1999: 42) durante las interacciones realizadas entre los actores del proceso educativo. La metodología del EC se fundamenta en una metodología particularmente pragmática pues reconoce "las relaciones que existen entre los elementos lingüísticos de un idioma objeto y todos los contextos de la vida real en los que tales elementos se utilizan apropiadamente" (Parish, 1987: 385). De aquí que el EC se centre en el desarrollo de habilidades y destrezas comunicativas, las cuales se reúnen en las llamadas *competencias comunicativas*.

La premisa fundamental del EC expresa que *existe una predisposición genética para el aprendizaje de los idiomas*. El sustento de esta premisa se basa en que diversos estudios sugieren que la predisposición al aprendizaje de los idiomas es genética (Por ejemplo, los trabajos de Trzaskowski y colaboradores, 2013, y los de Dale, Harlaar y Plomin, 2012). Junto con esta premisa, el EC tiene los siguientes principios metodológicos:

a. Se aprende más y mejor en etapas tempranas de la vida (OECD-CERI, 2009; Muñoz, 2008).
b. El objetivo de la enseñanza de los idiomas es el desarrollo de *Competencias Comunicativas*, las cuáles se clasifican en: competencia gramatical, competencia sociolingüística, competencia discursiva y competencia estratégica (Luzón y Soria, 1999). La *competencia gramatical* implica dominar el código lingüístico, es decir, la gramática, sistema fonológico y el léxico. La *competencia sociolingüística* se relaciona con el conocimiento de las propiedades de los enunciados en relación con el contexto social y la situación de comunicación en los que se producen (como en la información compartida entre los interlocutores, las intenciones comunicativas de la interacción, etc.). La *competencia discursiva* alude al conocimiento de las relaciones entre los diferentes elementos de un mensaje y al dominio de las normas de combinación de dichos elementos de acuerdo con los diferentes tipos de textos. La *competencia estratégica* hace referencia al dominio de las estrategias de comunicación verbal y no verbal para controlar la comunicación, para reforzar la eficacia de la misma o para compensar el insuficiente dominio de otras competencias.
c. Se tienen en cuenta contextos y la vida cotidiana.
d. Se busca desarrollar actividades que promuevan la comunicación, con conceptos claros sobre la realización de tareas y la investigación de significados.
e. Se busca desarrollar cuatro destrezas: comprensión auditiva, expresión oral, comprensión de lectura y expresión escrita.
f. El rol del profesor cambia, de ser un instructor, a ser un *facilitador* y proveedor de recursos de aprendizaje.
g. Se da un nuevo significado al *error*.

Para este trabajo el último principio es de singular importancia, ya que en nuestro medio cometer errores, y con ello tener la expectativa del fracaso, se considera una catástrofe. Sobre este aspecto se han realizado innumerables trabajos de investigación y en ellos encontramos diversos enfoques para utilizar los errores como oportunidades de aprendizaje (Austin y Logrip, 2004). Aquí se proporciona una forma de encarar los errores en lo que denominamos un Círculo de Retroalimentación, en el que cada momento está mediado o dirigido por el docente (fig. 1). Los momentos del círculo comienzan con dos principios de aceptación: (a) aceptar que todos podemos cometer errores, por lo que no es lícito en el aula hacer bromas, burlas o comentarios sarcásticos, y (b) que los errores son oportunidades de aprendizaje. Estos principios constituyen la idea central sobre la que se fundamentan los cuatro momentos que integran el círculo propiamente dicho. Una vez que se ha iniciado un cambio de actitud ante los errores, se siguen los cuatro momentos del círculo: 1. aceptar haber cometido un error; 2. entender, exactamente, cuál es el error y sus posibles causas; 3. qué va a hacer el estudiante para corregir el error; y 4. corregir el error.

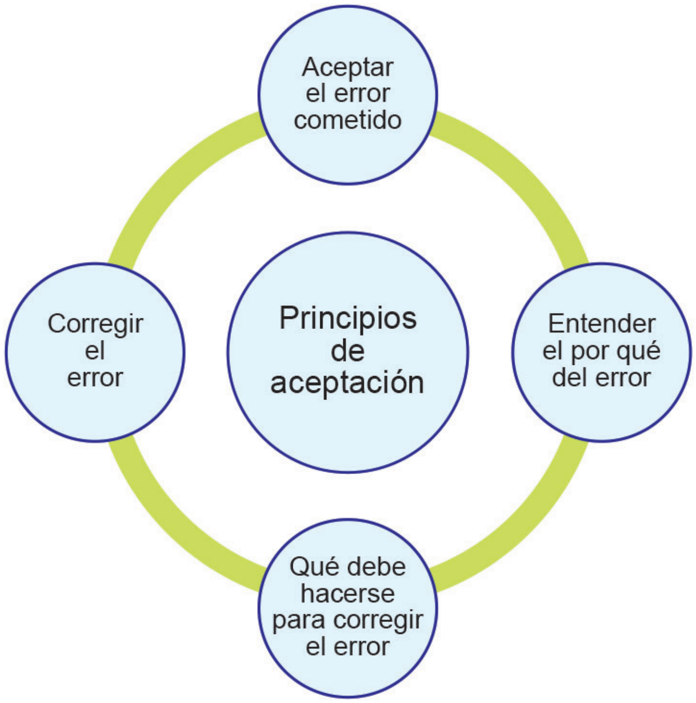


Fig. 1. Círculo de Retroalimentación

2.3. Una didáctica para las matemáticas basada en el Enfoque Comunicativo

De lo discutido en la sección 2, es evidente que nuestro sistema educativo presenta fallas en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Estamos seguros de que una de las formas en las que podría intervenirse para superar los inconvenientes actuales del aprendizaje de las matemáticas es la aceptación de dos premisas fundamentales que derivamos de los principios metodológicos del EC y de la discusión de la sección 2.1.:

2.3.1. *El cerebro humano está genéticamente acondicionado para aprender matemáticas* (Trzaskowski y colaboradores, 2013; Radford, y André, 2009; Geary, 2007).

2.3.2. *Dado que las matemáticas son un lenguaje en sí mismas, enfocar su enseñanza de manera análoga a como se hace con la enseñanza de los idiomas puede conducir a resultados satisfactorios en el aprendizaje*.

A partir de la primera se podrían desterrar los atavismos que se traducen en obstáculos sin sentido para el aprendizaje. Las frases repetitivas como: "las matemáticas son difíciles, sólo para genios", pueden tener una influencia dramática en las futuras actitudes y desempeño de los estudiantes ante la perspectiva de tener que cursar matemáticas. A partir de la segunda premisa, podrían diseñarse diversas estrategias de enseñanza-aprendizaje. Un ejemplo de esta posibilidad es la *Didáctica Comunicativa*, la cual desarrollamos con base en el EC (fig. 2).

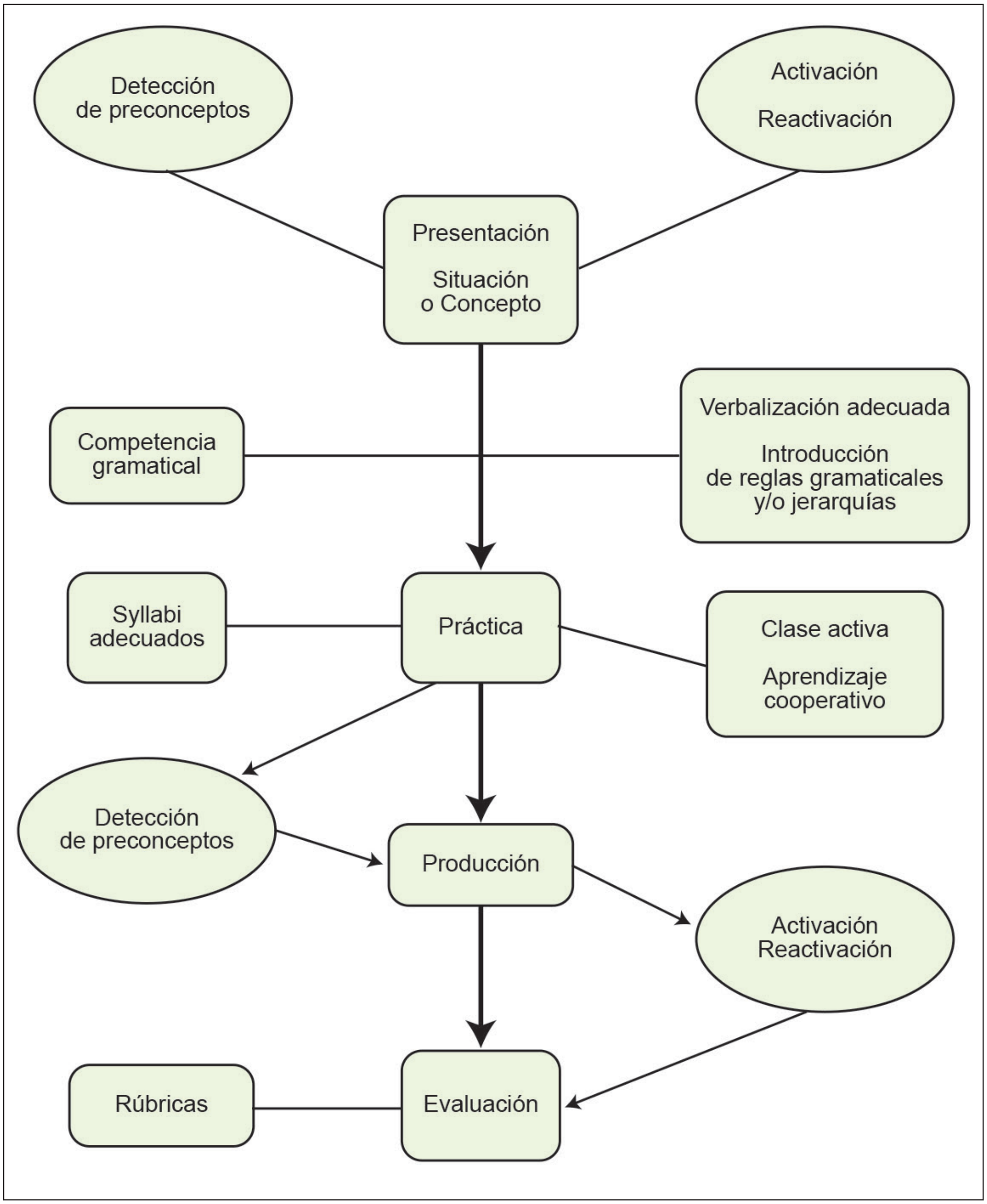


Fig. 2. Didáctica Comunicativa para las Matemáticas

La puesta en práctica de la Didáctica Comunicativa requiere del desarrollo de secuencias didácticas. A continuación presentamos un ejemplo de ellas para el tema de *leyes de exponentes* de expresiones algebraicas con radicales.

Desarrollo de una secuencia

Leyes de exponentes: radicales y su transformación a exponentes fraccionarios

Detección de preconceptos; activación y reactivación
La técnica podría ser una lluvia de ideas, las cuales concentrarán las ideas más relevantes y adecuadas para el estudio de monomios y su simplificación.
¿Qué es una raíz?
¿Qué significa $\sqrt{A}$?
¿Cuál es el resultado de $\sqrt{16}$?
Si $\sqrt{16} = 4$, ¿Qué característica debe tener el 4?
¿Qué imagen se puede asociar a $\sqrt{16}$?
¿Qué es el índice de un radical?
¿Qué significado tiene el índice de un radical? ¿Cuál es y dónde se especifica el índice del radical?
¿Cómo se interpreta $\sqrt[4]{16}$?
¿Puede escribirse $\sqrt{A}\ y\ \sqrt[5]{x}$ de otra forma?

Confrontación
Confrontar verbalizaciones incorrectas e inapropiadas con significados ambiguos, por ejemplo: es común que el alumno no verbalice adecuadamente el concepto de raíz, ya sea cuadrada o cúbica o de índice mayor. Por ejemplo: en $\sqrt[4]{16}$, el alumno puede verbalizar raíz de 16 ignorando el índice del radical propuesto, esto lo lleva a una concepción equivocada de la n-ésima raíz que habría que calcular. Confrontar al alumno con una inspección adecuada de la expresión que involucra un radical y su índice, llevará al alumno a evaluar o a manipular mejor los radicales.

Presentación
Situaciones o contextos en los cuales será importante conocer los radicales y los exponentes fraccionarios para su aplicación.
Calcular el lado de un cuadrado o un cubo, conociendo su área o su volumen, respectivamente.
Cálculo del interés que se requiere para duplicar una inversión con intereses compuestos, sabiendo el tiempo que se desea dejar la inversión.
$P = P_0(1+i)^t$, donde t es el tiempo en años.
$2P_0 = P_0(1+i)^t$
$2 = (1+i)^t$
$1 + i = \sqrt[t]{2}$
$i = \sqrt[t]{2} - 1$
Las leyes de exponentes se pueden aplicar a exponentes positivos, negativos y fraccionarios, sólo es necesario conocer la transformación de una expresión con un radical a exponentes fraccionarios, cuidando la jerarquía matemática.

Descubrimiento o explicitación de reglas gramaticales o jerarquías:
Competencia gramatical, uso apropiado del lenguaje
Por inducción y ejemplos guiados llegar a descubrir el método de aplicación para la transformación de la raíz de una expresión a la expresión elevada a un exponente fraccionario, basándose en los preconceptos estudiados.
Comprobar la veracidad en un ejemplo sencillo, de uso común:
Ejemplo: $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = x^1 = x$
Si se tiene un cuadrado con un área de x, cada lado debe ser de $\sqrt{x}$, y el área se calcularía por la multiplicación de $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$.
Si un cubo tiene el volumen de 27, su arista mide (un número que multiplicado por sí mismo 3 veces sea, precisamente 27). Este contexto se puede expresar de la forma: $\sqrt[3]{27}$
La transformación: $\sqrt[n]{A^m} = \left(\sqrt[n]{A}\right)^m = A^{\frac{m}{n}}$.

EDUCERE - Investigación Arbitrada - ISSN: 1316-4910 - Año 21 - Nº 66 - Mayo - Agosto 2016 / 271 - 283

Competencia gramatical y uso apropiado del lenguaje

Aunque esta transformación puede realizarse por inspección, es importante hacer notar a los alumnos que es una radicación de una expresión potenciada.

$$\sqrt[n]{A^m} = (A^m)^{\frac{1}{n}} = A^{\frac{m}{n}}$$

$$\left(\sqrt[n]{A}\right)^m = \left(A^{\frac{1}{n}}\right)^m = A^{\frac{m}{n}}$$

La expresión transformada final se obtiene multiplicando los exponentes y conservando la base (A). El uso adecuado del lenguaje y el análisis de las características generales y específicas juegan un papel primordial en el entendimiento de las expresiones potenciadas que se vuelven a potenciar.

La diferenciación de, para su posterior aplicación, entre:

$$\sqrt[5]{x} \cdot \sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{5}} \cdot x^{\frac{1}{4}} = x^{\frac{1}{5}+\frac{1}{4}} = x^{\frac{9}{20}} = \sqrt[20]{x^9} \text{ y}$$

$$\sqrt[5]{\sqrt[4]{x}} = \sqrt[5]{x^{\frac{1}{4}}} = \left(x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{5}} = x^{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}} = x^{\frac{1}{20}} = \sqrt[20]{x}$$

A partir de este conocimiento, las leyes de exponentes son aplicables indistintamente a exponentes enteros positivos, fraccionarios, positivos y negativos.

Práctica

Una técnica efectiva es la yo-tú-nosotros, que significa que primero el alumno trata de resolver o resuelve el ejercicio por sí sólo, luego lo compara con un compañero y posteriormente se discute en la clase con el apoyo del profesor.

Es importante poner ejercicios que abarquen todas las posibilidades incluyendo algunos en los que no sean aplicables las leyes de exponentes, para que el alumno por inspección de las características generales y específicas pueda llegar a la conclusión de que una cierta ley de exponentes no sería aplicable en un caso dado. Hay que hacer hincapié que los alumnos realmente traten de transformar las expresiones por sí solos, para darse cuenta dónde tuvieron dificultades que pueden ser resueltas por el profesor.

Seguir con la técnica de verbalización de las leyes que se aplicaron es de suma importancia. Pueden a la hora de tratar de verbalizar la ley que aplicaron, darse cuenta de que las condiciones del ejercicio no les permite la aplicación.

Producción

En esta fase el alumno tendrá que buscar por sí mismo el método y las leyes de exponentes más apropiados para los ejercicios.

Si el alumno sabe cuándo es aplicable una ley y cuándo no, habrá realizado un proceso metacognitivo sobre las leyes de exponentes. Para ello hay que enfrentar al alumno a muy diversos ejercicios, empezando por los más sencillos para complicarlos posteriormente:

$$\sqrt[4]{9^3} \times \sqrt[4]{9} = \qquad \sqrt{x^{-3}} \cdot \sqrt[3]{x^5} = \qquad \frac{\sqrt[4]{y^5}}{\sqrt[4]{y}} = \qquad \frac{\sqrt[3]{(x+3)^4}}{\sqrt[3]{(x+3)^5}} = \quad , \qquad etc.$$

En seguida se pueden poner ejercicios de leyes de exponentes combinadas.

$$\frac{\sqrt[3]{(a+b)^{2m}}}{\left(\sqrt[3]{(a+b)^{m-3}}\right)^2} = \qquad \frac{\left(\sqrt[4]{a}\right)^5 \cdot \left(\sqrt{a}\right)^{-2}}{\sqrt[4]{a^{-3}} \cdot \sqrt[3]{a^5}} = , etc.$$

Como siguiente paso se intercalarán algunos ejercicios en los cuales (directamente) no serán aplicables las leyes de exponentes, como por ejemplo:

$$\sqrt[3]{x^4} \cdot y^{\frac{1}{6}} = \qquad \sqrt[3]{a^4} + \sqrt[3]{a^4} =$$

En esta parte es indispensable que los alumnos justifiquen por qué no pueden aplicar las leyes de exponentes, para propiciar la metacognición, en términos establecidos anteriormente.

También se puede confrontar al alumno con ejercicios muy parecidos, para que noten las diferencias que son importantes para que una ley de exponentes no sea aplicable.

$$\sqrt{x^2 y^2} \quad y \quad \sqrt{x^2 + y^2}$$

Evaluación

La misma tarea de producción lleva a la rúbrica de evaluación propuesta.

Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4	Nivel 5
Transformar radicales en exponentes fraccionarios. Verbaliza la forma en que se procede. Si/No	Aplicación de las leyes de exponentes con exponentes fraccionarios en ejercicios que sí se pueden aplicar las leyes Si/No	Aplicación de leyes de exponentes con exponentes fraccionarios combinadas Si/No	Bases y exponentes literales y fraccionarios Si/No	Confrontación con la no aplicabilidad de una ley de exponentes Si/No

3. Metodología

Siguiendo a Cohen y Manion (1990), el estudio da lugar a una metodología cuasi experimental en la que se sigue el esquema O_i - X - O_f , donde O_i representa la observación inicial (pretest), X la aplicación de las secuencias didácticas desarrolladas con base en la propuesta de enseñanza aprendizaje a la que se refiere este trabajo y O_f la observación final (postest). Para las observaciones se eligieron dos grupos experimentales y dos grupos de control. En los primeros se aplica la propuesta, mientras que con los grupos de control se sigue un esquema de enseñanza tradicional. En los esquemas anteriores, lo que se denomina observación consiste en un examen de siete ejercicios algebraicos que ejemplifican otros tantos temas esenciales del curso de Álgebra. El cálculo de las medias en las respuestas correctas se realiza por medio de la distribución binomial (Walpole, Myers y Myers, 1998). La aplicación de las fórmulas se realiza de la siguiente manera: Para la media se tiene , mientras que para la desviación estándar se calcula por la relación , donde *p* es la probabilidad favorable (o éxito), *q* la probabilidad desfavorable (o fracaso), tal que $q=1 - p$, y *n* el número de pruebas repetidas. En este caso, *n* representa el número total de reactivos del examen, esto es, $n = 7$. La probabilidad *p*, se calcula dividiendo el número total de respuestas correctas –la que a su vez no es más que la suma de todas las respuestas correctas para un grupo dado- entre el número total de preguntas contestadas por ese grupo, que se calcula multiplicando *n* por el número de estudiantes menos el número total de respuestas no contestadas por grupo.

Para evaluar los resultados generales de la aplicación del examen se utilizó el factor de Hake (Redish y Steinberg., 1999), el cual mide la *ganancia* en el aprendizaje. Resultados generales obtenidos en diversos estudios muestran que los grupos con enseñanza tradicional obtienen valores de alrededor de 0.16 para el factor de Hake, mientras que los basados en cursos con métodos de enseñanza producto de investigación educativa, muestran factores de Hake que oscilan entre 0.35 y de 0.41, dependiendo de los métodos de enseñanza utilizados. El factor de Hake expresado en porcentajes, es:

$$h = \frac{postest\ (\%) - pretest\ (\%)}{100 - pretest\ (\%)}$$

La aplicación de la propuesta se llevó a cabo durante el semestre que corre de enero a mayo de 2015. El curso **Álgebra** comprende 10 grandes temas: Aritmética (manejo de fracciones, radicales y jerarquía matemática) y álgebra básica (leyes de exponentes, manejo de operaciones de monomios y polinomios, factorización, simplificación de fracciones algebraicas, resolución de ecuaciones lineales, resolución de ecuaciones cuadráticas, resolución de un sistema de ecuaciones en dos variables, gráfica de una recta y el desglose de impuestos). El pre test se aplicó al inicio del curso, mientras que el pos test al finalizar el semestre. El número de estudiantes por grupo es: Grupo Experimental 1 (GE1), 12; Grupo Experimental 2 (GE2), 14; Grupo de Control 1 (GC1), 12; Grupo de Control 2 (GC2), 14.

EDUCERE - Investigación Arbitrada - ISSN: 1316-4910 - Año 21 - Nº 66 - Mayo - Agosto 2016 / 271 - 283

Los grupos anteriores están compuestos por estudiantes que toman la materia por primera vez y por estudiantes que la llevan por segunda o por tercera vez. Los porcentajes de estudiantes repetidores y de nuevo ingreso (a la asignatura) de cada grupo se resumen en la tabla 1 siguiente.

Tabla 1. Porcentajes de alumnos repetidores y de nuevo ingreso por grupo

Composición inicial de los grupos	Porcentaje de alumnos que toman la materia por primera vez	Porcentaje de alumnos que están repitiendo la materia
GC1	28%	72%
GC2	78%	22%
GE1	0%	100%
GE2	64%	36%

Fuente: Elaboración propia

La composición de los grupos resumida en la tabla 1 muestra un cierto grado de heterogeneidad entre ellos dada la combinación de estudiantes repetidores y estudiantes que cursa por primera vez la asignatura Álgebra. Es de notarse que el GC1 y el GE1 contienen altos porcentajes de alumnos repetidores; de hecho, el GE1 es un grupo de repetidores en su totalidad. Como se discute en la siguiente sección, esto tiene repercusiones significativas sobre los resultados del pretest.

4. Resultados

De acuerdo con lo mencionado en la metodología, en la tabla 2 se resumen los valores de las medias **(μ)** y sus desviaciones estándar (μ) para el pre-test y post-test aplicados a los grupos experimentales y de control.

Tabla 2. Concentración de datos de p, μ y σ, del pre test y pos test, de los grupos de control y los grupos experimentales

Grupos de control	p-pre test	μ-pre test	σ-pre test	p-pos test	μ-pos test	σ-pos test
GC1	0.190476	1.333333	1.038925	0.351351	2.246913	1.235185
GC2	0.010204	0.071429	0.265894	0.347826	1.887640	1.174144
Grupos experimentales	**p-pre test**	**μ-pre test**	**σ-pre test**	**p-pos test**	**μ-pos test**	**σ-pos test**
GE1	0.142857	1	0.92582	0.320988	2.459459	1.263062
GE2	0.030612	0.214286	0.455770	0.269663	2.434783	1.260120

Fuente: Elaboración propia

En la tabla 2 pareciera que las medias de respuestas correctas de los pretests de los grupos GC1 y GE1 son mayores que los correspondientes grupos 2. Esto se debe a que, como lo muestra la tabla 1, en ellos existe el mayor número de estudiantes repetidores.

En la tabla 3 se reportan los valores del factor Hake de los grupos de control y experimentales.

Tabla 3. Valores del factor Hake para los grupos de control y los grupos experimentales

Grupos de control	Factor de Hake
GC1	0.161
GC2	0.262
Grupos experimentales	**Factor de Hake**
GE1	0.243
GE2	0.327

Fuente: Elaboración propia

Reacomodando, para una mejor interpretación de los resultados, en los grupos que tienen mayor número de repetidores y los que tienen primordialmente alumnos que cursan la materia por primera vez, se tiene:

Tabla 4. Valores del factor Hake para los grupos de control y los grupos experimentales

Grupo	GC1	GE1	GC2	GE2
Índice de Hake	0.161	0.243	0.262	0.327

Fuente: Elaboración propia

Los valores del factor de Hake de la tabla 4 muestran que los grupos experimentales tuvieron una mayor ganancia en el aprendizaje que los grupos de control con respecto a la composición de repetidores (GC1 vs. GE1; GC2 vs. GE2). Llaman la atención los casos del GC1 y del GE1 que mostraron una mayor media de respuestas correctas en el pretest, pues la ganancia del GC1 fue la más baja de los cuatro grupos. Sin embargo, el GC2 obtuvo una ganancia superior al GE1, la cual también puede explicarse en términos de la composición de ambos grupos. El GE1 fue un grupo totalmente de repetidores, mientras que GC2 solamente tuvo 22% de alumnos repetidores. Podríamos aducir que los alumnos repetidores tienen una actitud más negativa ante el curso que los estudiantes que la llevan por primera vez, de manera que, aunque el resultado no fue completamente satisfactorio, al compararlo con la ganancia para GC1, se observa una mejoría notable. El grupo GE2 fue el que tuvo, con un 36% de repetidores, la mayor ganancia.

Conclusiones

Como una primera conclusión tenemos que los resultados presentados sugieren que la aplicación de la Didáctica Comunicativa para las Matemáticas desarrollada en este trabajo produce efectos positivos en el aprendizaje, con lo cual probamos nuestra hipótesis de trabajo.

Lo esencial de nuestro trabajo, el desarrollo y puesta en marcha de la Didáctica Comunicativa, así como de las secuencias didácticas que la acompañan, basa sus resultados positivos en tres pilares que han de considerarse para estudios posteriores: que el cerebro humano está genéticamente acondicionado para aprender matemáticas, que existe una predisposición genética para el aprendizaje de los idiomas y que la retroalimentación juega un papel preponderante en la formación académica de los estudiantes.

Respecto al cumplimiento de los objetivos, puede apreciarse su realización a lo largo del documento. Vemos entonces que, al considerar a la Matemática como un lenguaje, es posible enfocar su enseñanza desde la óptica de la didáctica de los idiomas, en particular del inglés, de acuerdo con los principios del Enfoque Comunicativo y obtener aprendizajes significativos en el estudiantado.Ⓔ

EDUCERE - Investigación Arbitrada - ISSN: 1316-4910 - Año 21 - Nº 66 - Mayo - Agosto 2016 / 271 - 283

Clara Cristina Catarina Eccius Wellmann. Es profesora de Matemáticas en la Escuela de Ciencias Económicas y Empresariales de la Universidad Panamericana campus Guadalajara. Sus líneas de investigación son la Enseñanza de las Matemáticas y los Errores Algebraicos.

Antonio Lara-Barragán Gómez. Es profesor de Física en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Panamericana campus Guadalajara. Sus líneas de investigación son Enseñanza de las Ciencias y Evaluación de los Aprendizajes.

Josefina Santana Villegas. Es profesora de Inglés del Centro de Lenguas de la Universidad Panamericana campus Guadalajara. Su línea de investigación es la Didáctica de los Idiomas.

Bibliografía

Arana, Juan. (2000). ¿Es la Naturaleza un libro escrito en caracteres matemáticos? Anuario Filosófico. Navarra. España, 33, 43-66.

Austin, Suzanne y Logrip, Eleanor. (2004). Join the conversation dealing with student errors: A post-examination report on student learning. Learning Assistance Review (TLAR). Chicago. USA, 9 (2), 41-55.

Cohen, Louis y Manion, Lawrence. (1990). Métodos de Investigación Educativa. Madrid-España: Editorial La Muralla.

Dale, Phillip. S., Harlaar, Nicole y Plomin, Robert. (2012). Nature y nurture in school-based second language achievement. Language Learning. Michigan. USA, 62: Suppl. 2. 28-48.

De Guzman, Miguel. (2007). Cátedra Miguel de Guzmán, Universidad Complutense de Madrid. Recuperado el 11 de Noviembre de 2015 en: http://www.mat.ucm.es/catedramdeguzman/drupal/inicio

Demirezen, Mehmet. (2011). The Foundations of the Communicative Approach and Three of Its Applications. Journal of Language and Linguistic Studies. Turkey, 7, 57-71.

Eccius-Wellmann, Cristina y Lara-Barragán, Antonio. (2016). Hacia un perfil de ansiedad matem**ática en estudiantes de nivel superior.** Revista Iberoamericana de Educación Superior. Ciudad de México, 8(18), en prensa.

Galilei, Galileo. (1981). El Ensayador. Buenos Aires-Argentina: Aguilar.

Geary, David C. (2007). An evolutionary perspective on learning disability in Mathematics. Developmental Neuropsychology. Austin, TX. USA, 32 (1) 471-519.

Legg, Angela y Locker, Lawrence. (2009). Math Performance and Its Relationship to Math Anxiety and Metacognition. North American Journal of Psychology. Florida, USA, 11(3), 471-486.

Leppävirta, Johanna. (2011). The Impact of Mathematics Anxiety on the Performance of Sudents of Electromagnetics. Journal of Engineering Education. Washington, D.C. USA, 100(3), 24-43.

Luzón Encabo, José María y Soria Pastor, Inés. (1999). El Enfoque Comunicativo en la enseñanza de lenguas. Un desafío para los sistemas de enseñanza y aprendizaje abiertos y a distancia. Revista Iberoamericana de Educación a Distancia. La Loja, España, 2 (2). DOI: http://dx.doi.org/10.5944/ried.2.2.2077

Maier, Hermann. (2004). Zu fachsprachlicher Hyper- und Hypotrophie im Fach Mathematik oder wie viel Fachsprache brauchen Schüler im Mathematikunterricht? Journal für Mathematik-Didaktik. Alemania, 2, 153-166.

Muñoz, Carmen. (2008). Age-related differences in foreign language learning. Revisiting the empirical evidence. International Review of Applied Linguistics in Language Teaching. Boston, USA, 46, 197-220. DOI 10-1515/IRAL.2008.009

OECD-CERI. (2009). La Comprensión del Cerebro. El nacimiento de una ciencia del Aprendizaje. Santiago de Chile: Ediciones UCSH, Primera Edición.

Ospitaletche-Borgmann, Elisabeth y Martínez Luaces, Víctor. (2012). La Matemática como idioma y su importancia en la enseñanza y aprendizaje del Cálculo. Números, Revista de Didáctica de las Matemáticas. Tenerife, 79, 7-16

Parish, Charles. (1987). Communicative methodology and learner-centered approaches in language teaching. Papers on Language y Literature. Illinois, USA, 23 (3), 383-394.

Radford, Luis y André, Mélanie. (2009). Cerebro, cognición y matemáticas. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Ciudad de México, 12 (2), 215-250.

Redish, Edward F. y Steinberg, Richard N. (1999). Teaching physics: figuring out what works. Physics Today. Maryland, USA, 52 (1), 24-30.

Segade Alonso, Carlos Emilio. (2012). Fundamentación epistemológica del enfoque comunicativo en la enseñanza de lenguas extranjeras: una visión cognitivo-personalista. Didáctica, Lengua y Literatura. Madrid, España, 24, pp. 473-487. http://dx.doi.org/10.5209/rev_DIDA.2012.v24.39935

Trzaskowski, Maciej, Davies, Oliver, S.P., DeFries, John. C.; Yang, Jun.; Visscher, Peter M. y Plomin, Robert. (2013), Behavior Genetics, DNA Evidence for Strong Genome-Wide Pleiotropy of Cognitive and Learning Abilities. Behavior Genetics. 43: 267-273. DOI 10.1007/s10519-013-9594-x

Walpole, Ronald E., Myers, Raymond H. y Myers, Sharon L. (1998). Probability and Statistics for Engineers and Scientists. San Francisco: John Wiley and Sons.